



INTERREG V-A
SLOVENSKÁ REPUBLIKA
ČESKÁ REPUBLIKA



EURÓPSKA ÚNIA
EURÓPSKY FOND
REGIONÁLNEHO ROZVOJA

SPOLOČNE BEZ HRANÍC

STABILITNÉ PROBLÉMY PRÚTOV

NÁZOV PROJEKTU:

**Podpora edukačných aktivít pre výchovu mladých odborníkov
v oblasti mostného stavebníctva v cezhraničnom regióne
(ITMS kód projektu 304011U647)**



VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA

EDUMOS

Projekt je podporovaný z programu Interreg V-A Slovenská republika – Česká republika a spolufinancovaný z Európskeho fondu regionálneho rozvoja

Prúty namáhané osovým tlakom

Ak je štíhlosť prúta malá, t.j. pri $\lambda \leq 20$ pri overovaní jeho spoľahlivosti rozhoduje najviac namáhaný tlačný prierez. Nie je pritom potrebné zohľadňovať vplyv straty stability tvaru prúta. Výpočet odolnosti prierezu sa stanovuje pri predpoklade rovnomerného priebehu napätosti po priereze.

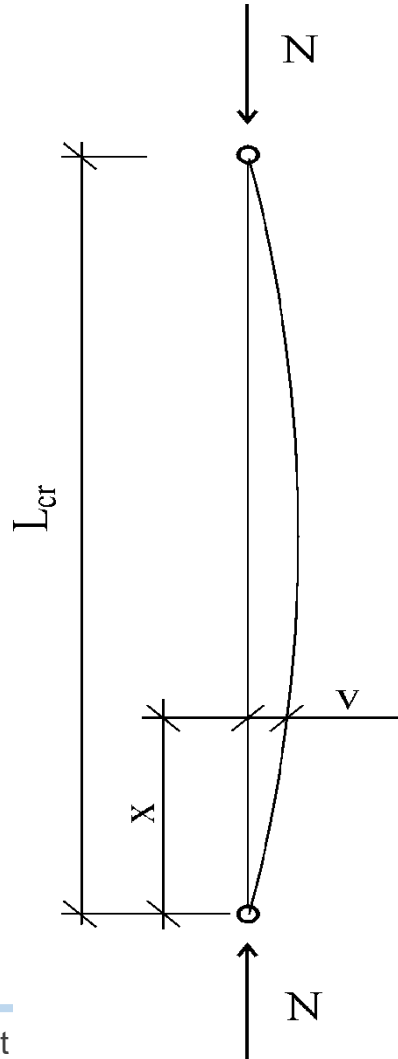
V prípade prútov väčších štíhlostí dochádza k strate stability tvaru prúta. Mení sa priebeh napätosti po najviac namáhanom priereze, čo má samozrejme vplyv na odolnosť prierezu a definíciu medzného stavu v podmienke spoľahlivosti.

Stabilitný problém vzperu

Stabilitným problémom vzperu označujeme dnes už klasický a prekonaný prístup, ktorý platí pre model ideálneho prúta. Ideálnym prútom sa označuje prút bez akýchkoľvek nedokonalostí - imperfekcií.

Tieto imperfekcie sú geometrického, štrukturálneho alebo konštrukčného charakteru. Základy stability ideálneho prúta položil Euler už v roku 1744.

Stabilitný problém vzperu



Prípad rovinnej straty stability ideálneho prúta konštantnej ohybovej tuhosti EI namáhaného silou N charakterizuje diferenciálna rovnica:

$$EIv'' + Nv = 0$$

Stabilitný problém vzperu

Kolaps prúta nastáva rozdvojením rovnováhy spojeným s náhlou stratou stability tvaru. Riešením uvedenej homogénnej rovnice však nezískame vzťah pre deformáciu prúta v. Stanovíme silu, pri ktorej prút náhle stratí stabilitu, tzv. kritickú Eulerovu silu v tvare:

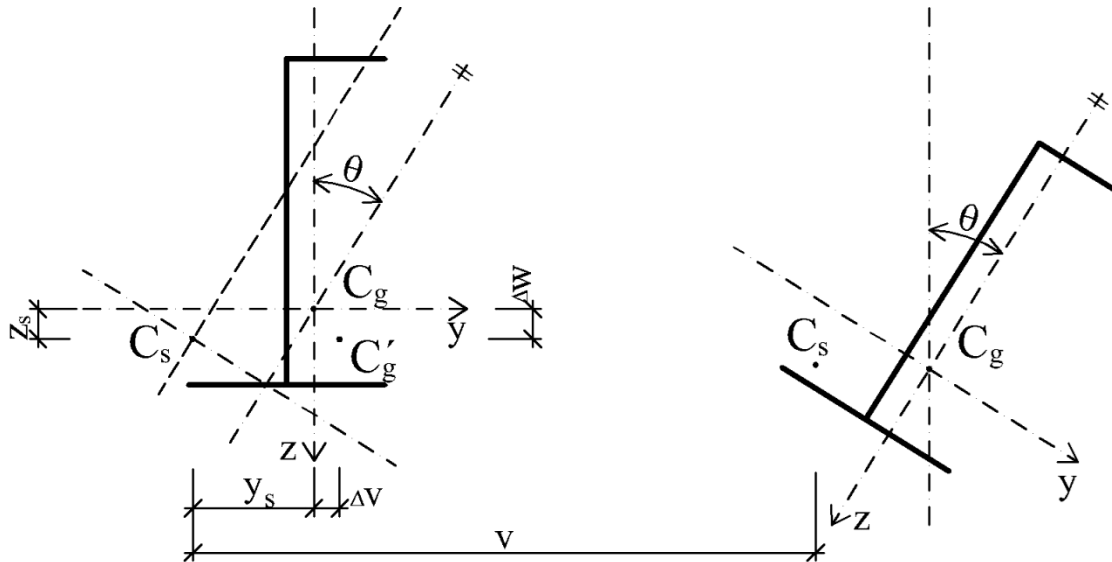
$$N_{cr} = \pi^2 EI / L_{cr}^2 \quad L_{cr} \quad \text{je vzperná dĺžka prúta.}$$

Kritické napätie ideálneho prúta potom bude v tvare:

$$\sigma_{cr} = N_{cr} / A = \pi^2 EI / (L_{cr}^2 \cdot A) = \pi^2 \cdot E \cdot i^2 / L_{cr}^2 = \pi^2 E / \lambda^2$$

$$\lambda = L_{cr} / i \quad \text{je štíhlosť prúta}$$

Priestorová strata stability prúta



$$\left(EI_z v''\right)'' + (Nv)'' + (Nz_s \cdot \theta)'' = 0$$

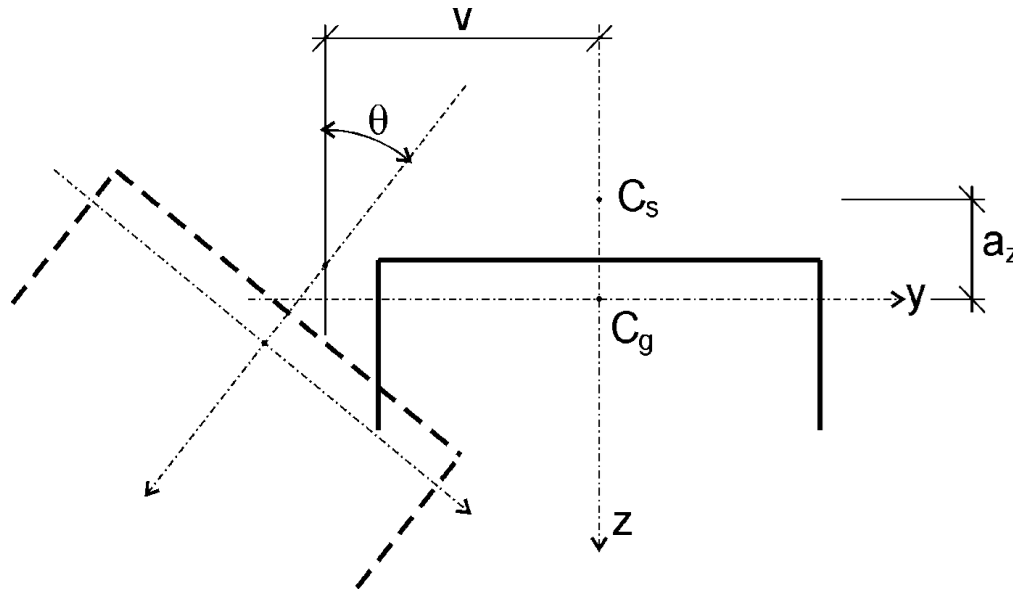
$$\left(EI_y w''\right)'' + (Nw)'' - (Ny_s \theta)'' = 0$$

$$\left(EI_w \theta'''\right)' - (GI_t \theta')' + (Ni_s^2 \theta')' + (Nz_s v')' - (Ny_s w')' = 0$$

Priestorová strata stability prúta

$$N_{cr}^3 \left(y_s^2 \alpha_{yw} + z_s^2 \alpha_{zw} - i_p^2 \right) - N_{cr}^2 \left(N_{cr,y} z_s^2 \alpha_{zw} + N_{cr,z} y_s^2 \alpha_{yw} - N_{cr,y} i_p^2 - N_{cr,z} i_p^2 - N_{cr,w} i_p^2 \right) - N_{cr} \left(N_{cr,y} N_{cr,w} i_p^2 + N_{cr,z} N_{cr,w} i_p^2 + N_{cr,z} N_{cr,y} i_p^2 \right) + N_{cr,z} N_{cr,y} N_{cr,w} i_p^2 = 0$$

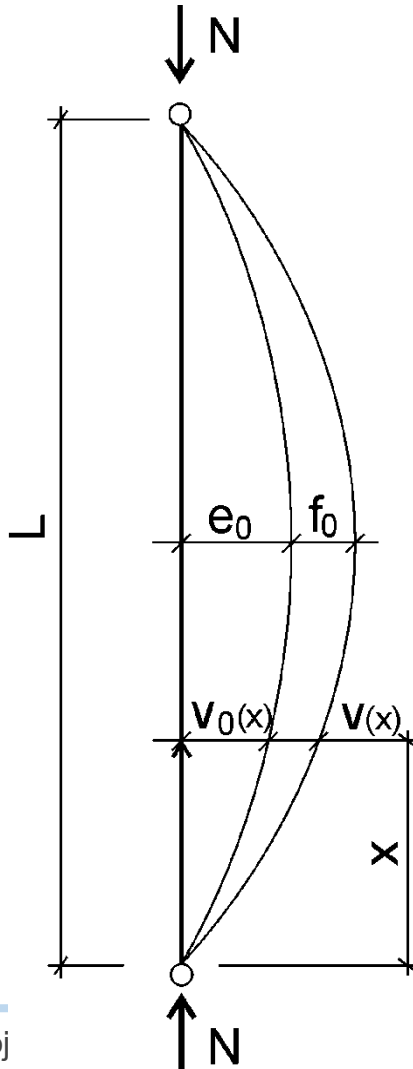
$N_{cr,z} = \pi^2 EI_z / (k_z L)^2$	i_s je polárny polomer zotrvačnosti
$N_{cr,y} = \pi^2 EI_y / (k_y L)^2$	I_y, I_z sú momenty zotrvačnosti prierezu k príslušným osiam,
$N_{cr,w} = \left(\frac{\pi^2 EI_w}{(k_w L)^2} + GI_t \right) / i_s^2$	I_t je moment tuhosti pri voľnom krútení,
	I_w je výsekový kvadratický moment plochy
	N_{cr} je kritická sila prúta, zodpovedajúca priestorovej strate stability,
	k_y, k_z, k_w súčinitele vzperných dĺžok pre jednotlivé smery vybočenia prúta,
	α_{yw}, α_{zw} faktory zohľadňujúce okrajové podmienky pre ohyb a krútenie.



$$(N_{cr,y} - N_{cr}) \left[(N_{cr,z} - N_{cr}) (N_{cr,w} - N_{cr}) \cdot i_p^2 - N_{cr}^2 \cdot \alpha_{zw} z_s^2 \right] = 0$$

$$N_{cr} = N_{cr,TF} = \frac{1}{2 \left(1 - \alpha_{zw} \left(\frac{z_s}{i_s} \right)^2 \right)} \left[(N_{cr,z} + N_{cr,T}) - \sqrt{(N_{cr,z} + N_{cr,T})^2 - 4 N_{cr,z} N_{cr,T} \left(1 - \alpha_{zw} \left(\frac{z_s}{i_s} \right)^2 \right)} \right]$$

Pevnostný problém vzperu celistvých prútov



Skutočný prút má nevyhnutné nedokonalosti. Tieto imperfekcie predstavujú geometrické, štrukturálne a konštrukčné nedostatky reálneho prúta.

Ayrton a Perry prvýkrát zaviedli model imperfektného prúta. Ich výpočet zohľadňoval len vplyv geometrickej imperfekcie v tvare začiatočného zakrivenia prúta.

$$EIv'' + Nv(x) = -Nv_0(x)$$

$$v_0(x) = e_0 \cdot \sin(\pi x / L)$$

Pevnostný problém vzperu celistvých prútov

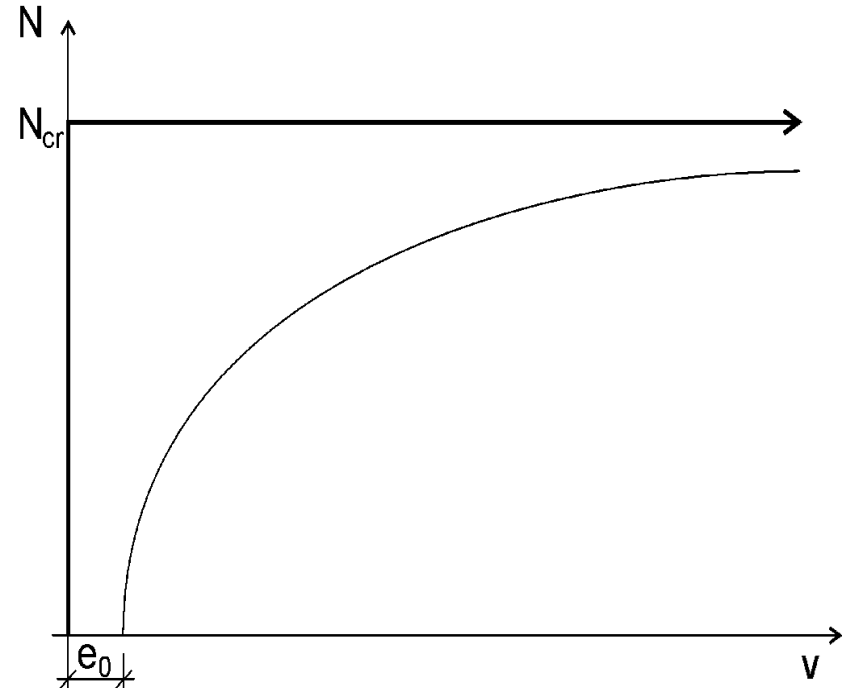
Všeobecné riešenie uvedenej diferenciálnej rovnice je

$$v(x) = C_1 \cdot \sin \alpha_x + C_2 \cdot \cos \alpha_x + f_0 \cdot \sin(\pi x / L)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

$$f_0 = e_0 \cdot N / (N_{cr} - N)$$

$$v(x) = \frac{N \cdot e_0}{N_{cr} - N} \cdot \sin(\pi x / L)$$



Pevnostný problém vzperu celistvých prútov

$$M(L/2) = M_{\max} = N \cdot (e_0 + f_0) = N \cdot \left(e_0 + e_0 \cdot \frac{N}{N_{\text{cr}} - N} \right) =$$

$$= N \cdot e_0 \frac{N_{\text{cr}}}{N_{\text{cr}} - N} = N \cdot e_0 \left(\frac{\alpha_{\text{cr}}}{\alpha_{\text{cr}} - 1} \right) \quad \alpha_{\text{cr}} = N_{\text{cr}} / N$$

$$\sigma_{\max} = N/A + M/W = N/A + Ne_0 \left(\frac{1}{1 - N/N_{\text{cr}}} \right) / W =$$

$$= \frac{N}{A} + \frac{Ne_0}{jA} \left(\frac{1}{1 - N/N_{\text{cr}}} \right) = \sigma_0 \left(1 + \eta \frac{1}{1 - \sigma_0 / \sigma_{\text{cr}}} \right)$$

$\sigma_0 = N/A$ je osové napätie v strednici prúta,

$\eta = e_0 / j$ je Perryho faktor,

j je jadrová úsečka prierezu.

Pevnostný problém vzperu celistvých prútov

Medzný stav sa definuje dosiahnutím medze klzu v krajných vláknach

$$\sigma_{\max} = \sigma_b \left(1 + \eta \frac{1}{1 - \sigma_b / \sigma_{cr}} \right) = f_y$$

Ayrton - Perryho formula

$$(\sigma_{cr} - \sigma_b)(f_y - \sigma_b) = \eta \sigma_b \sigma_{cr}$$

Pre praktické normové vyjadrenie sa Ayrton - Perryho formula upravuje zavedením výrazov:

$$\chi = \sigma_b / f_y \quad \bar{\lambda} = \lambda / \lambda_1 = (f_y / \sigma_{cr})^{0,5} \quad \lambda_1 = \pi(E / f_y)^{0,5} = 93,9(235 / f_y)^{0,5}$$

$$\chi = 1 / \left[\phi + (\phi^2 - \bar{\lambda}^2)^{0,5} \right] \quad \phi = 0,5 \left(1 + \eta + \bar{\lambda}^2 \right)$$

Pevnostný problém vzperu celistvých prútov

Z ďalších analýz výsledkov výskumu vyplynulo, že v tomto vzťahu použitý Perryho faktor η môžeme vyjadriť ako polynomickú funkciu pomernej štíhlosti. Stačí pritom uvažovať len prvý člen tejto závislosti a tento faktor vyjadriť vzorcom:

$$\eta = \alpha_1 (\bar{\lambda} - 0,2)$$

Krivka vzpernosti	a_0	a	b	c	d
Miera imperfekcie α_1	0.13	0.21	0.34	0.49	0.76

Overenie vzpernej odolnosti je potom v tvare

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1,00, \quad N_{b,Rd} = \chi A f_y / \gamma_{M1}$$

Pevnostný problém vzperu celistvých prútov

Pri rovinnej strate stability sa pomerná štíhlosť prúta vyjadrí:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i \lambda_1}$$

pre prierez triedy 1, 2 a 3

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff} f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i \lambda_1} \sqrt{\frac{A_{eff}}{A}}$$

pre prierez triedy 4

Vzper členených prútov

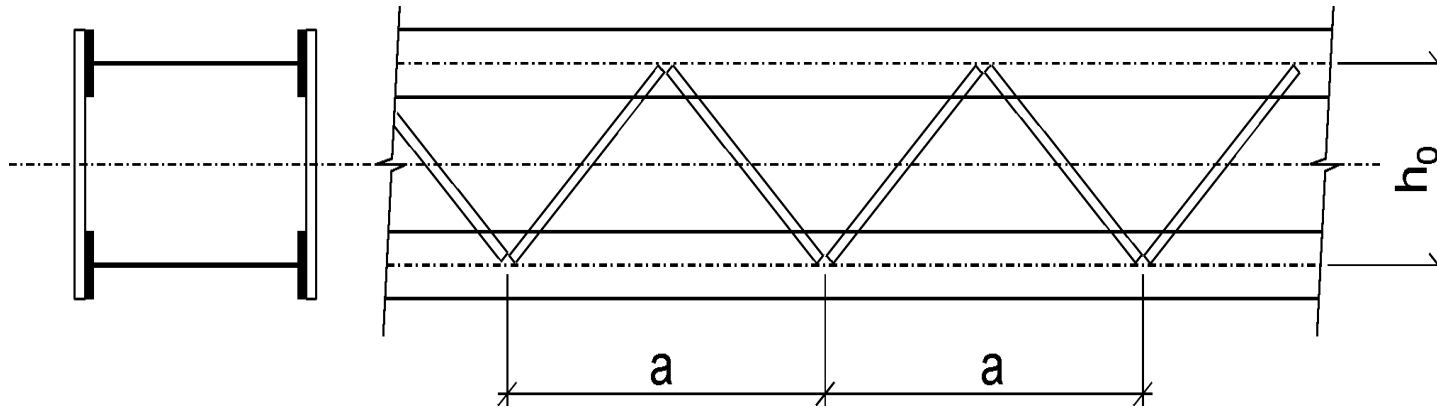
Členený prút sa skladá z dvoch, prípadne viacerých parciálnych celistvých prierezov, ktoré sú po dĺžke prúta nepriebežne konštrukčne spojené.

Podľa charakteru spojenia rozlišujeme členené prúty:

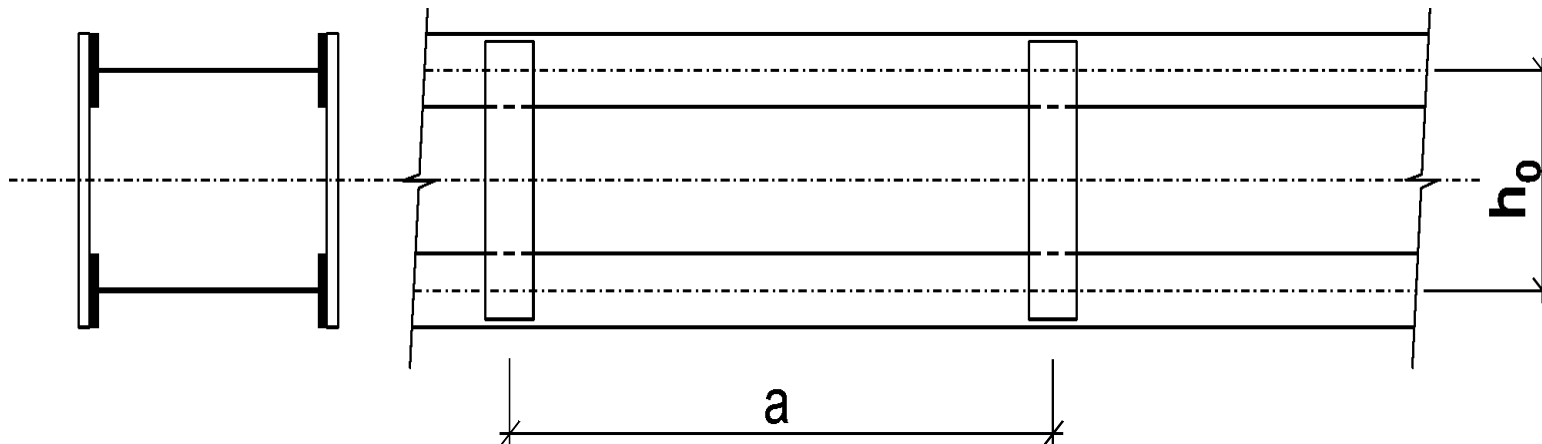
- priehradové,
- rámové,
- zložené

Členený prút má mať zabezpečené spojenie na obidvoch koncoch a okrem toho aspoň v tretinách dĺžky členeného prúta. Ďalej sa predpokladá ich symetria k nehmotnej osi celého prierezu, t. j. k osi, ktorá neprechádza parciálnymi časťami prierezu členeného prúta. Znamená to, že parciálne časti prierezu členeného prúta sú rovnaké. Koncové uloženie členeného prúta sa uvažuje na obidvoch koncoch kĺbové.

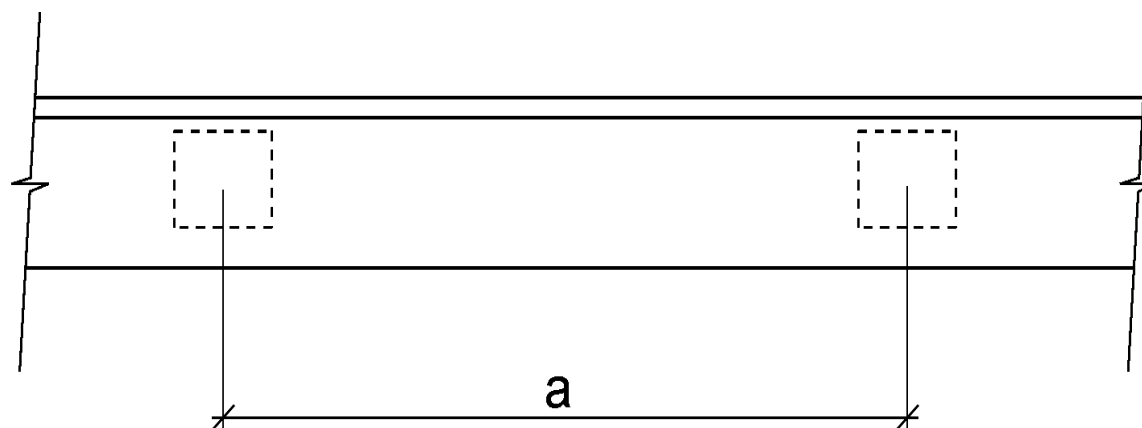
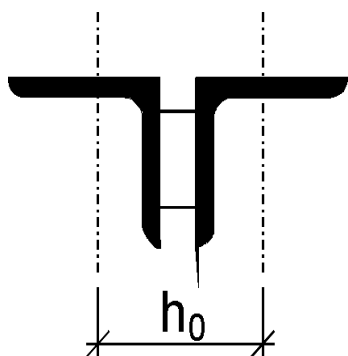
členené prúty s priehradovými spojkami



členené prúty s rámovými spojkami



zložené členené prúty



Vzper členených prútov

Správanie členeného prúta je ovplyvnené dvoma odlišnosťami v porovnaní s celistvým prútom:

- **vplyv šmykovej poddajnosti prúta v dôsledku diskkrétneho spojenia**
- **vplyv interakcie globálneho a lokálneho vzperu.**

Tieto odlišnosti sa prejavujú pri vybočení prúta kolmo na nehmotnú os. Pri vybočení kolmo na hmotnú os sa prút správa ako celistvý a posúdi sa metodikou overovania vzpernej odolnosti celistvých prútov.

Vplyv šmykového pretvorenia prierezov členených prútov sa prejaví nárastom priečnej deformácie, ktorá je vyvolaná nielen vplyvom ohybového momentu, ale aj efektom priečnej sily. Táto vzniká na tlačnom prúte v dôsledku aplikácie teórie 2. radu.

Vzper členených prútov

Vplyv šmykovej poddajnosti prúta sa zohľadňuje redukciou kritickej sily v tvare:

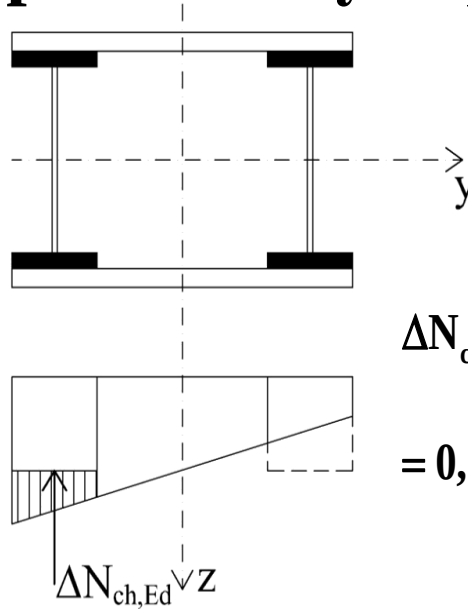
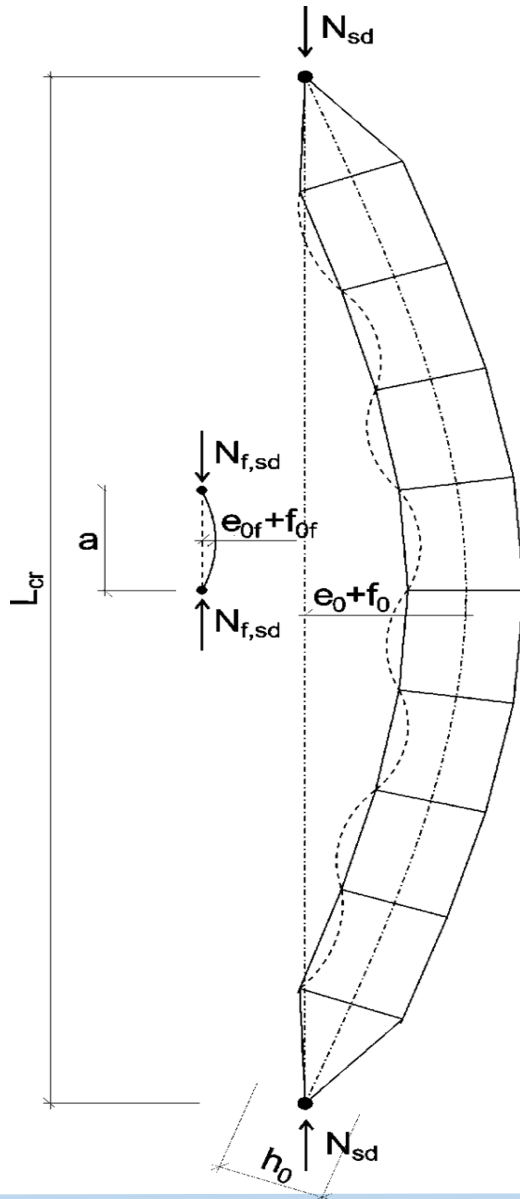
$$N_{cr,s} = \frac{N_{cr}}{\left(1 + \frac{N_{cr}}{GA_v}\right)} \text{ pričom } N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2}$$

Vplyv interakcie globálneho a lokálneho vzperu sa rieši overením vzpernej odolnosti parciálneho prúta, ktorý musí byť celistvý, namáhaného nielen tlakovou silou, ale aj doplnkom sily v dôsledku globálneho vybočenia.

Na parciálny prút tak pripadne sila za predpokladu dvoch prútov

$$N_{ch,Ed} = 0,5N_{Ed} + \Delta N_{ch,Ed}$$

Vzper členených prútov



$$\Delta N_{ch,Ed} = \int_{A_{ch}} \sigma dA_{ch} = \frac{M_{Ed}}{I_{eff}} \int_{A_{ch}} y dA_{ch} = \frac{M_{Ed}}{I_{eff}} S_{y,ch} =$$

$$= 0,5 M_{Ed} h_0 A_{ch} / I_{eff}$$

$$M_{Ed} = N_{Ed} (e_0 + f_0) = N_{Ed} e_0 \left(1 + \frac{N_{Ed}}{N_{cr,s} - N_{Ed}} \right) = N_{Ed} e_0 \frac{N_{cr,s}}{N_{cr,s} - N_{Ed}} =$$

$$= N_{Ed} \cdot e_0 \cdot \frac{\frac{N_{cr}}{1 + N_{cr} / GA_v}}{\frac{N_{cr}}{1 + N_{cr} / GA_v} - N_{sd}} = \frac{N_{Ed} e_0}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} - \frac{N_{Ed}}{S_v}}$$

Vzper členených prútov

**Overenie spoľahlivosti tlačného členeného prúta je potom
Pomocou vzťahu**

$$\frac{N_{ch,Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1.0 \qquad N_{b,Rd} = \chi A_{ch} f_y / \gamma_{M1}$$

$N_{ch,Ed}$ je návrhová tlaková sila v parciálnom prúte uprostred rozpätia,

$N_{b,Rd}$ je návrhová hodnota vzpernej odolnosti parciálneho prúta pre vzpernú dĺžku a rovnú vzdialenosti spojok.

Vzper členených prútov

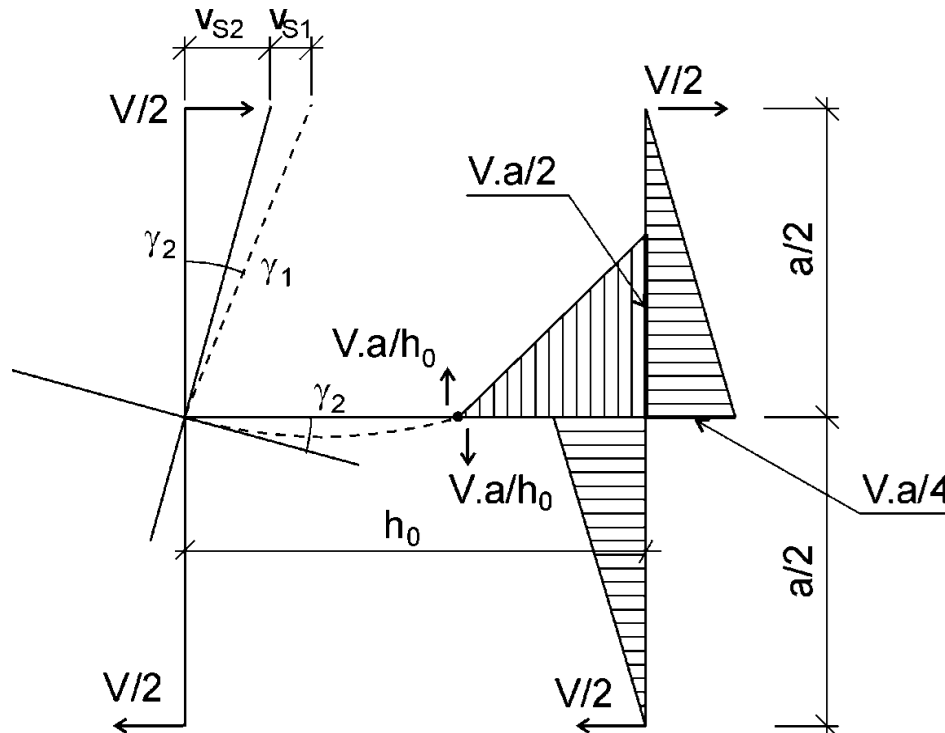
Efektívny kvadratický moment plochy členeného prúta sa vyjadrí:

$$I_{\text{eff}} = 0,5h_0^2 A_{\text{ch}} + 2\mu I_{\text{ch}}$$

$$N_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E I_{\text{eff}}}{L^2}$$

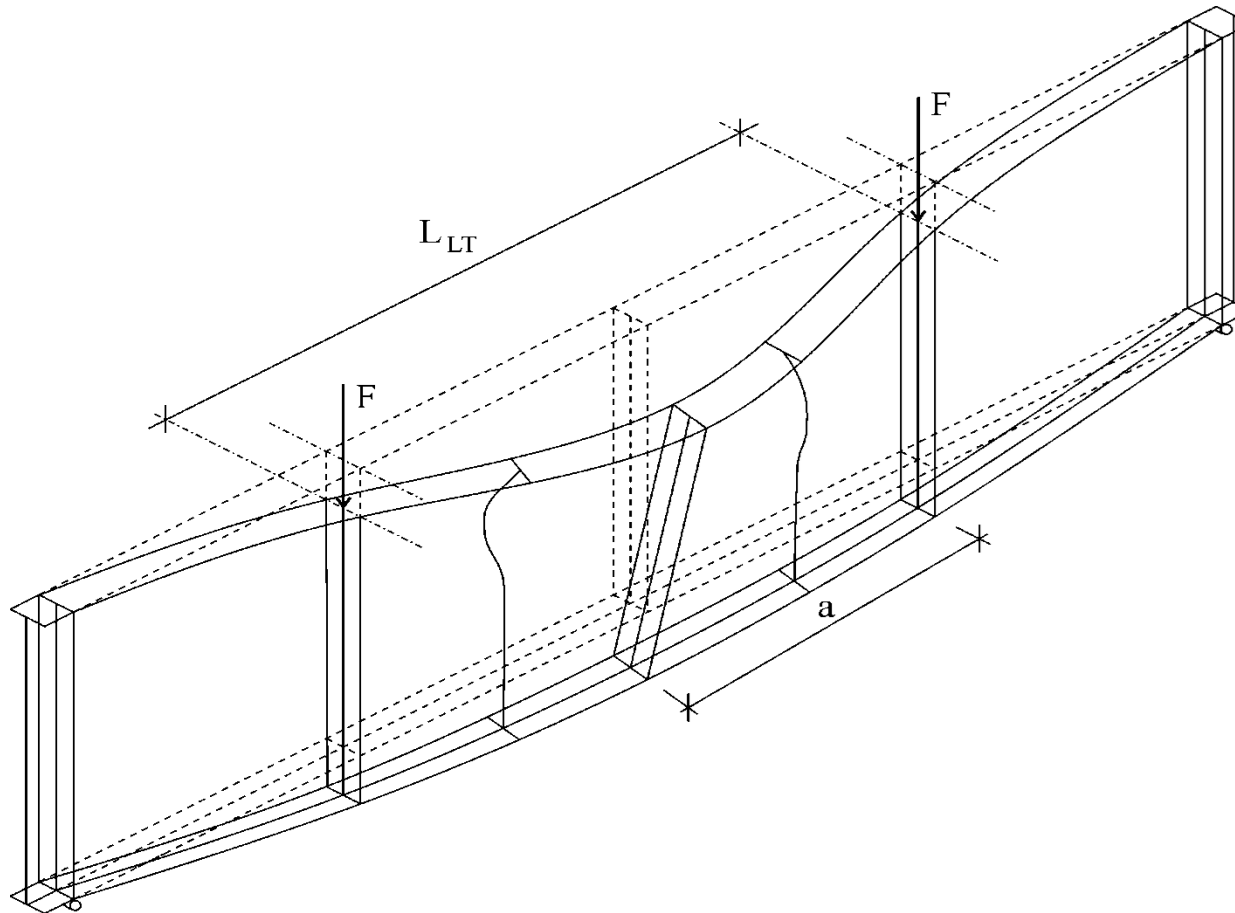
Kritérium	Faktor účinnosti μ
$\lambda \geq 150$	0
$75 < \lambda < 150$	$\mu = 2 - \frac{\lambda}{75}$
$\lambda \leq 75$	1.0
ak $\lambda = \frac{L}{i_0}$; $i_0 = \sqrt{\frac{I_1}{2A_{\text{ch}}}}$; $I_1 = 0,5h_0^2 A_{\text{ch}} + 2I_{\text{ch}}$	

Vzper členených prútov

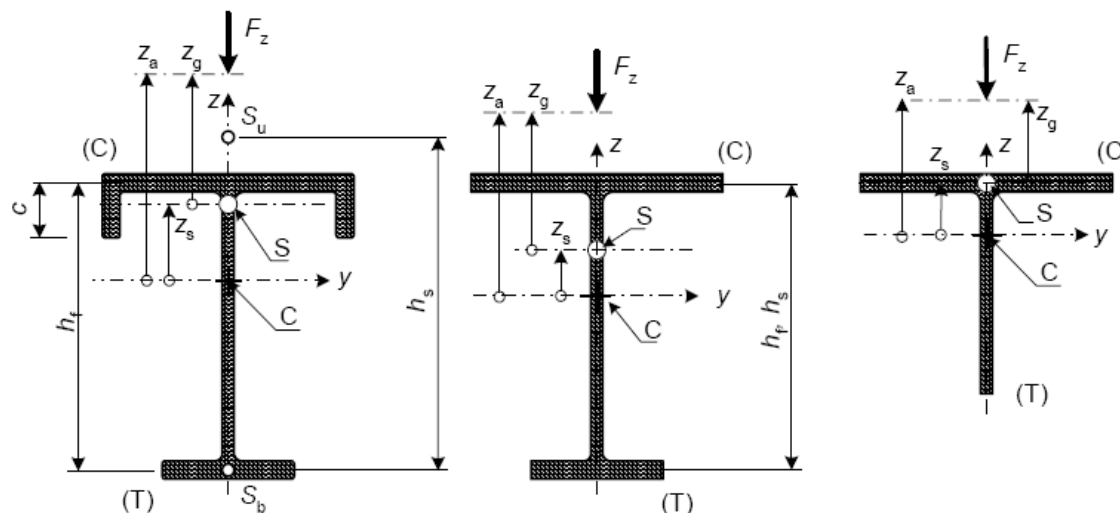


$$S_V = 1/\gamma = \frac{24EI_{ch}}{a^2 \left[1 + \frac{2I_{ch}}{nI_b} \frac{h_0}{a} \right]} \quad \text{ale} \quad S_V \leq \frac{2\pi^2 EI_{ch}}{a^2}$$

Stabilita prútov namáhaných ohybom



Stabilita prútov namáhaných ohybom



$$EI_z v'' + M_y \theta = 0$$

$$EI_w \theta^{IV} - GI_t \theta'' - 2z_j (M_y \theta')^I + (M_y v')^I + q_z z_g \theta = 0$$

v je posun v smere osi y ,

θ je natočenie prierezu,

z_j je charakteristická úsečka prierezu, zohľadňujúca vplyv nesymetrie prierezu:

$$z_j = z_s - \frac{1}{2I_y} \int_A z (y^2 + z^2) dA$$

Stabilita prútov namáhaných ohybom

I_y, I_z sú kvadratické momenty plochy prierezu k jeho príslušným osiam,

I_w je výsekový kvadratický moment plochy prierezu,

I_t je moment tuhosti prierezu pri voľnom krútení.

Sústava rovníc predstavuje systém diferenciálnych rovníc 4. radu s nekonštantnými koeficientmi, ktorej riešenie v uzavretom analytickom tvare nie je známe.

Analytické riešenie môžeme získať len pre výnimkové prípady, ktoré poskytnú systému rovníc konštantné koeficienty. Je to napríklad situácia, kedy bude prút namáhaný konštantným ohybovým momentom, teda $M_y = \text{konšt.}$

$$EI_z v'' + M_y \theta = 0, \quad EI_w \theta^{IV} - GI_t \theta'' - 2z_j M_y \theta'' + M_y v'' = 0$$

Stabilita prútov namáhaných ohybom

Riešenie tejto sústavy predpokladáme v tvaroch:

$$v = v_0 \sin \pi x / L \quad \theta = \theta_0 \sin \pi x / L$$

Získame sústavu dvoch algebraických homogénnych rovníc. Netriviálne riešenie amplitúd v_0 a θ_0 vyplýva z nulového determinantu tejto sústavy.

Z tejto podmienky dostaneme rovnicu:

$$M_{cr}^2 - 2z_j N_{cr,z} M_{cr} - N_{cr,z} N_{cr,w} i_s^2 = 0$$

$$M_{cr} = N_{cr,z} \left[z_j + \left(z_j^2 + i_s^2 \cdot N_{cr,w} / N_{cr,z} \right)^{0,5} \right]$$

$$N_{cr,z} = \pi^2 E I_z / L_z^2 \quad N_{cr,w} = \left(\pi^2 E I_w / L_w^2 + G I_t \right) / i_s^2$$

Stabilita prútov namáhaných ohybom

$i_s = (i_y^2 + i_z^2 + z_s^2)^{0,5}$ je polárny polomer zotrvačnosti

z_s je vzdialenosť stredu šmyku C_s od ťažiska prierezu C_g

Pre dvojsovo symetrický prierez, pre ktorý $z_j = 0$ sa vzťah pre M_{cr} zjednoduší do tvaru:

$$M_{cr} = N_{cr,z} (i_s^2 \cdot N_{cr,w} / N_{cr,z})^{0,5} = (i_s^2 N_{cr,w} N_{cr,z})^{0,5} = \frac{\pi^2 EI_z}{L_z^2} \left[\left(\frac{\pi^2 EI_w}{L_w^2} + GI_t \right) / \frac{\pi^2 EI_z}{L_z^2} \right]^{0,5} =$$

$$= \frac{\pi^2 EI_z}{(k_z L)^2} \left[\frac{I_w}{I_z} \left(\frac{k_z}{k_w} \right)^2 + \frac{GI_t (k_z L)^2}{\pi^2 EI_z} \right]^{0,5}$$

$$L_z = k_z L, \quad L_w = k_w L,$$

L je systémová dĺžka prúta.

Stabilita prútov namáhaných ohybom

V prípade všeobecne namáhaného jednoosovo symetrického prierezu sa v STN EN 1993-1-1 použil vzťah odvodený Djalalym na základe výsledkov Clarka a Hilla. Podobný vzťah odvodil v roku 1958 Mrázik.

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(k_z L)^2} \left\{ (C_3 z_j + C_2 z_g) + \sqrt{(C_3 z_j + C_2 z_g)^2 + \left[\frac{I_w}{I_z} \left(\frac{k_z}{k_w} \right)^2 + \frac{GI_t}{EI_z} \left(\frac{k_z L}{\pi} \right)^2 \right]} \right\}$$

Pre praktické aplikácie sú v NA k STN EN 1993-1-1 spracované pomôcky umožňujúce počítať M_{cr} pre rôzne okrajové podmienky a namáhania.

Stabilita prútov namáhaných ohybom

$$M_{cr} = \mu_{cr} \frac{\pi \sqrt{EI_z GI_t}}{L}$$

μ_{cr} je pomerná hodnota kritického momentu v tvare:

$$\mu_{cr} = \frac{C_1}{k_z} \left[\sqrt{1 + \kappa_{wt}^2 + (C_2 \varsigma_g - C_3 \varsigma_j)^2} - (C_2 \varsigma_g - C_3 \varsigma_j) \right]$$

$$\kappa_{wt} = \frac{\pi}{k_w L} \sqrt{\frac{EI_w}{GI_t}} \quad \varsigma_g = \frac{\pi z_g}{k_z L} \sqrt{\frac{EI_z}{GI_t}} \quad \varsigma_j = \frac{\pi z_j}{k_z L} \sqrt{\frac{EI_z}{GI_t}}$$

C_1 , C_2 a C_3 sú faktory závislé od zaťaženia a okrajových podmienok nosníka a sú uvedené v tab. NB 3.1 v NA k STN EN 1993-1-1.

$$z_g = z_a - z_s \quad z_j \doteq 0,45 \psi_f h_s \left(1 + \frac{c}{2h_f} \right) \text{ zjednodušené vyjadrenie}$$

Stabilita prútov namáhaných ohybom

c je výška okrajovej výstuhy pásnice,
 h_f je vzdialenosť medzi ťažiskami pásnic.

$$\psi_f = \frac{I_{fc} - I_{ft}}{I_{fc} + I_{ft}}$$

I_{fc} je kvadratický moment plochy tlačenej pásnice k hlavnej osi,
 I_{ft} je kvadratický moment plochy ťahanej pásnice k hlavnej osi,
 h_s je vzdialenosť medzi stredmi šmyku hornej a dolnej pásnice.

Pri prierezoch symetrických k osi y sa vzťah pre μ_{cr} zjednoduší do tvaru:

$$\mu_{cr} = \frac{C_1}{k_z} \left[\sqrt{1 + \kappa_{wt}^2 + (C_2 \zeta_g)^2} - C_2 \zeta_g \right]$$

Ak je priebeh M_y konštantný $C_2=0$ a vzťah sa zjednoduší

$$\mu_{cr} = \frac{C_1}{k_z} \sqrt{1 + \kappa_{wt}^2}$$

Odolnosť skutočných prútov namáhaných ohybom

Dôsledný pevnostný prístup európskej normy EN 1993-1-1 k stabilitným problémom priniesol aj pri ohýbaných prútoch tendenciu zohľadniť ich začiatočné imperfekcie.

Predpokladá sa model imperfektného obojstranne klbovo uloženého prúta s ekvivalentnými geometrickými imperfekciami, ktorými sú:

- začiatočné zakrivenie prúta v tvare sínusovej polovlny danej vzťahom: $v_0(x) = e_0 \sin(\pi x / L)$
- začiatočné natočenie prierezov ohýbaného prúta tiež v tvare sínusovej polovlny danej vzťahom:

$$\theta_0(x) = \theta_0 \sin(\pi x / L)$$

$$\theta_0 = e_0 \sqrt{\frac{N_{cr,z}}{i_s^2 N_{cr,w}}} = e_0 \frac{N_{cr,z}}{M_{cr}}$$

Odolnosť skutočných prútov namáhaných ohybom

V prípade dvojoso vo symetrického profilu s konštantným prierezom zaťaženého konšt. M_y sa sústava rovníc pre stabilitu ideálneho nosníka upraví do tvaru:

$$EI_z v'' + M(\theta(x) + \theta_0(x)) = 0 \quad EI_w \theta'' - GI_t \theta'' + M(v'' + v_0'') = 0$$

Úpravou sa získa 1 rovnica v tvare:

$$EI_w \theta'' - GI_t \theta'' - M^2 \theta(x) / EI_z = -M v_0'' + M^2 \theta_0(x) / EI_z$$

ktorej riešenie sa dá nájsť v tvare: $\theta(x) = \theta \sin(\pi x / L)$

Po jeho dosadení do rovnice hore získame algebraickú rovnicu v tvare:

$$\left(i_s^2 N_{cr,w} - M^2 / N_{cr,z} \right) \theta = M e_0 + M^2 \theta_0 / N_{cr,z}$$

Odolnosť skutočných prútov namáhaných ohybom

Z tejto rovnice sa vypočíta θ pri uvážení vzťahu medzi e_0 a θ_0 v tvare:

$$\theta = \frac{N_{cr,z} e_0}{M_{cr}} \frac{M / M_{cr}}{(1 - M / M_{cr})} = \theta_0 \frac{M / M_{cr}}{(1 - M / M_{cr})}$$

$$\theta_{(x)} = \theta_0 \frac{M / M_{cr}}{(1 - M / M_{cr})} \sin \frac{\pi x}{L}$$

Podobne pre amplitúdu v vybočenia nosníka odvodíme výraz:

$$v = e_0 \frac{M / M_{cr}}{(1 - M / M_{cr})} \quad v(x) = v \sin(\pi x / L) = e_0 \frac{M / M_{cr}}{(1 - M / M_{cr})} \sin(\pi x / L)$$

Odolnosť skutočných prútov namáhaných ohybom

Po vyjadrení M_z a B v tvaroch

$$M_z = -EI_z v'' = \frac{\pi^2 EI_z}{L_z^2} e_0 \frac{M / M_{cr}}{1 - M / M_{cr}} \sin \pi x / L = N_z e_0 \frac{M / M_{cr}}{1 - M / M_{cr}} \sin \pi x / L$$

$$B = -EI_w \theta'' = \frac{\pi^2 EI_w}{L_w^2} \theta_0 \frac{M / M_{cr}}{1 - M / M_{cr}} \sin \pi x / L$$

Odolnosť skutočných prútov namáhaných ohybom

Vyjadríme max. normálové napätie v strede nosníka pre súradnice prierezu $z = -h/2$, $y = -b_f/2$ and $w = -bh/4$

$$\sigma = \frac{M_y h}{2I_y} + \frac{M_z b_f}{2I_z} + \frac{Bw}{I_w} = \frac{M_y}{W_{el,y}} + \frac{M_z}{W_{el,z}} + \frac{Bw}{I_w} =$$

$$= \sigma_0 \left[1 + \frac{\pi^2 E b_f}{2L^2 \sigma_{cr}} (e_0 + \theta_0 h/2) \left(\frac{1}{1 - \sigma_0 / \sigma_{cr}} \right) \right]$$

Pričom $\sigma_{cr} = M_{cr} / W_{el,y}$ a $\sigma_0 = M_y / W_{el,y}$

Medzný stav je definovaný dosiahnutím f_y v krajných vláknach daných súradnicami hore

$$\sigma_{LT} \left[1 + \eta_{LT} \left(\frac{1}{1 - \sigma_{LT} / \sigma_{cr}} \right) \right] = f_y$$

$$\eta_{LT} = \frac{\pi^2 E b_f}{2L^2 \sigma_{cr}} (e_0 + \theta_0 h/2) =$$

$$= \frac{A}{W_z} (e_0 + \theta_0 h/2) \left(\frac{\lambda_{LT}}{\lambda_z} \right)^2$$

Odolnosť skutočných prútov namáhaných ohybom

Získame obdobu Ayrton –Perryho formuly v tvare

$$(f_y - \sigma_{LT})(\sigma_{cr} - \sigma_{LT}) = \eta_{LT} \sigma_{LT} \sigma_{cr}$$

Ak do rovnice pre max. σ dosadíme nasledujúce výrazy

$$\chi_{LT} = \sigma_{LT} / f_y \qquad \bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}}$$

kde χ_{LT} je súčiniteľ klopenia,

$\bar{\lambda}_{LT}$ je pomerná štíhlosť pri klopení.

$$(1 - \chi_{LT}) \left(1 - \chi_{LT} \bar{\lambda}_{LT}^2 \right) = \eta_{LT} \chi_{LT}$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \quad \text{ale} \quad \chi_{LT} \leq 1,0$$

Odolnosť skutočných prútov namáhaných ohybom

$$\Phi_{LT} = 0,5 \left[1 + \eta_{LT} + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] = 0,5 \left[1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

Overenie odolnosti v ohybe sa vykoná splnením podmienky:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1,0 \quad M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$$

$$W_y = W_{pl,y}$$

$$W_y = W_{el,y}$$

$$W_y = W_{eff,y}$$

pre triedu prierezu 1 alebo 2,

pre triedu prierezu 3,

pre triedu prierezu 4.

Odolnosť skutočných prútov namáhaných ohybom

Prierez netreba overovať na klopenie:

- Ak je tuhý v krútení,
- Ak je namáhaný v hlavnej rovine menšej tuhosti,

$$- \quad \bar{\lambda}_{LT} \leq \bar{\lambda}_{LT,0} \quad \text{alebo} \quad \frac{M_{Ed}}{M_{cr}} \leq \bar{\lambda}_{LT,0}^2$$

$$\bar{\lambda}_{LT,0} = 0,4$$

$$\bar{\lambda}_f = \frac{k_c L_c}{i_{f,z} \lambda_1} \leq \bar{\lambda}_{c0} \frac{M_{c,Rd}}{M_{y,Ed}}$$

Odolnosť skutočných prútov namáhaných ohybom

Pričom

$$M_{c,Rd} = W_y \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$$

L_c je vzdialenosť bodov bočného podopretia nosníka,

k_c je korekčný faktor štíhlosti pre priebeh momentu medzi bodmi zabezpečujúcimi stabilitu nosníka,

$i_{f,z}$ je polomer zotrvačnosti ekvivalentnej tlačenej pásnice tvorenej vlastnou pásnicou a 1/3 plochy tlačenej časti steny

$\bar{\lambda}_{c0}$ je limitná štíhlosť ekvivalentnej tlačenej pásnice daná vzt'ahom

$$\bar{\lambda}_{c0} = \bar{\lambda}_{LT,0} + 0,1 \qquad \lambda_1 = 93,9\varepsilon = 93,9 \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

Odolnosť skutočných prútov namáhaných ohybom

Vzperná krivka	a	b	c	d
Faktor imperfekcie α_{LT}	0,21	0,34	0,49	0,76

Prierez	Medze	Vzperná krivka
Valcované I-profily	$h/b \leq 2$	a
	$h/b > 2$	b
Zvárané I-profily	$h/b \leq 2$	c
	$h/b > 2$	d
Iné prierezy	-	d

Odolnosť skutočných prútov namáhaných ohybom

Pre valcované alebo ekvivalentné zvarané profily namáhané ohybom sa hodnoty χ_{LT} pre príslušné pomerné štíhlosti môžu určiť zo vzorcov:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \beta \bar{\lambda}_{LT}^2}} = \begin{cases} \leq 1,0 \\ \leq \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \end{cases} \quad \phi_{LT} = 0,5 \left[1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - \bar{\lambda}_{LT,0}) + \beta \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

$$\bar{\lambda}_{LT,0} = 0,4 \quad \beta = 0,75$$

Prierez	Medze	Vzperné krivky
Valcované I-profily	$h/b \leq 2$	b
	$h/b > 2$	c
Zvarané I-profily	$h/b \leq 2$	c
	$h/b > 2$	d



EUROKÓD 3: Navrhovanie ocel'ových konštrukcií



Pre valcované alebo ekvivalentné zvarané profily namáhané ohybom sa hodnoty χ_{LT} pre príslušné pomerné štíhlosti môžu určiť zo vzorcov:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \beta \bar{\lambda}_{LT}^2}} = \begin{cases} \leq 1,0 \\ \leq \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \end{cases} \quad \phi_{LT} = 0,5 \left[1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - \bar{\lambda}_{LT,0}) + \beta \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

Pričom $\bar{\lambda}_{LT,0} = 0,4$ $\beta = 0,75$

Prierez	Medze	Vzperné krivky
Valcované I-profily	$h/b \leq 2$	b
	$h/b > 2$	c
Zvarané I-profily	$h/b \leq 2$	c
	$h/b > 2$	d

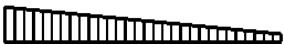
Odolnosť skutočných prútov namáhaných ohybom

Na zohľadnenie priebehu momentov medzi miestami bočného podopretia prútov, súčiniteľ klopenia χ_{LT} sa upravuje nasledovným spôsobom:

$$\chi_{LT,mod} = \frac{\chi_{LT}}{f} \quad \chi_{LT,mod} \leq 1$$

$$f = 1 - 0,5(1 - k_c)[1 - 2,0(\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2] \quad \text{ale } f \leq 1,0$$

k_c je opravný faktor podľa tab. 6.6 v STN EN 1993-1-1.

Priebeh momentov	k_c
 $\psi = 1$	1,0
 $-1 \leq \psi \leq 1$	$\frac{1}{1,33 - 0,33\psi}$
	0,94
	0,90
	0,91
	0,86
	0,77
	0,82