



INTERREG V-A
SLOVENSKÁ REPUBLIKA
ČESKÁ REPUBLIKA



EURÓPSKA ÚNIA
EURÓPSKY FOND
REGIONÁLNEHO ROZVOJA

SPOLOČNE BEZ HRANÍC

Globálna analýza mostov

Oblúčkové mosty

NÁZOV PROJEKTU:

**Podpora edukačných aktivít pre výchovu mladých odborníkov
v oblasti mostného staviteľstva v cezhraničnom regióne**

**VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA**

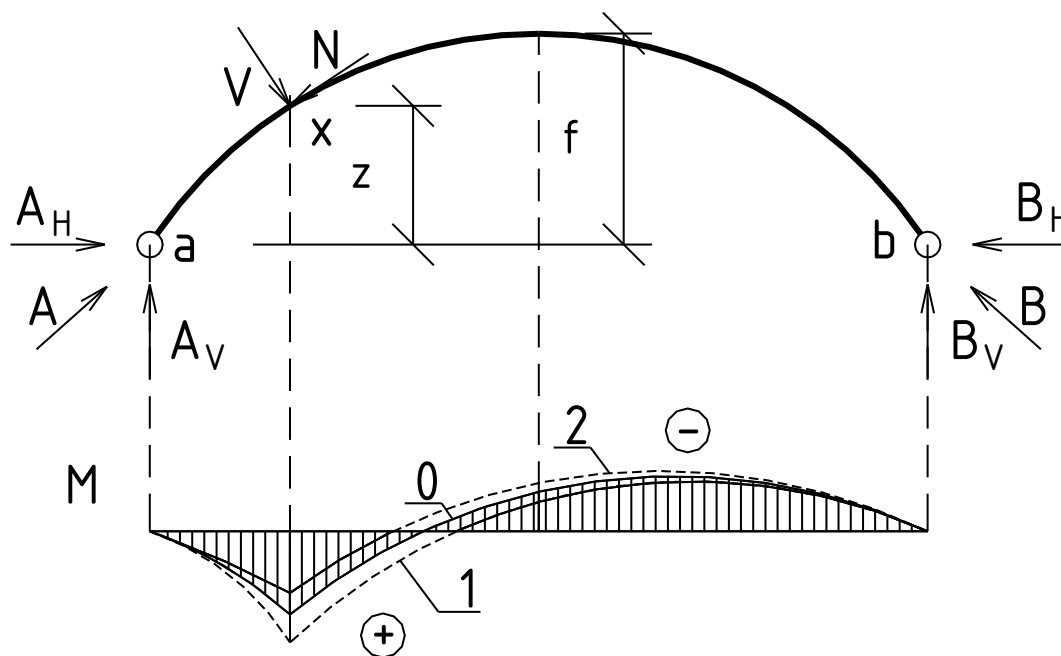


EDUMOS

Projekt je podporovaný z programu Interreg V-A Slovenská republika – Česká republika a spolufinancovaný z Európskeho fondu regionálneho rozvoja

Globálna analýza

Plnostenný oblúk – rovinný model



$$M_x = M_0 - H z$$

$$N_x = -V_0 \sin \varphi - H \cos \varphi$$

$$V_x = V_0 \cos \varphi - H \sin \varphi$$

- Pomocou vplyvových čiar k jadrovým bodom
- Základ – nájsť veľkosť oblúkovej sily H

Globálna analýza

Naviere: pri prútoch so zakrivenou strednicou neostanú priečne rezy rovinnými, ale sa zakrivujú.



$$\sigma_x(z) = \frac{N}{A} - \frac{M}{rA} - \frac{Mz}{Z} \frac{r}{r+z}$$

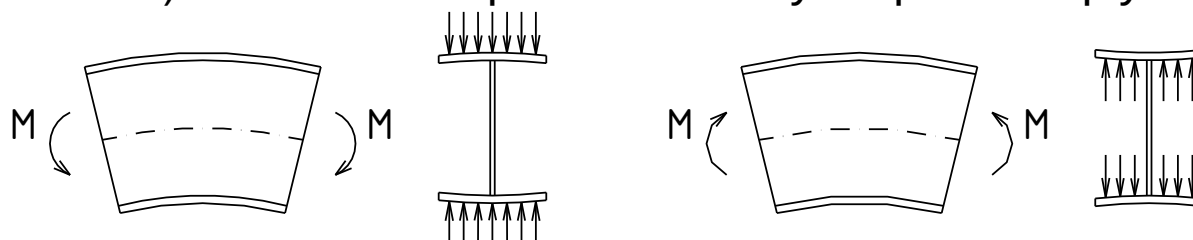
Z je zovšeobecnený kvadratický moment plochy

$$Z = r \int \frac{z^2}{r+z} dA$$

Pre veľké polomery „r“ (cca $r/z > 100$) sa smie zanedbať

$$\sigma_x(z) \doteq \frac{N}{A} - \frac{Mz}{I}$$

Pre malé polomery „r“ (rámové) dochádza k priečnemu ohybu pásnic vplyvom radiálnych síl

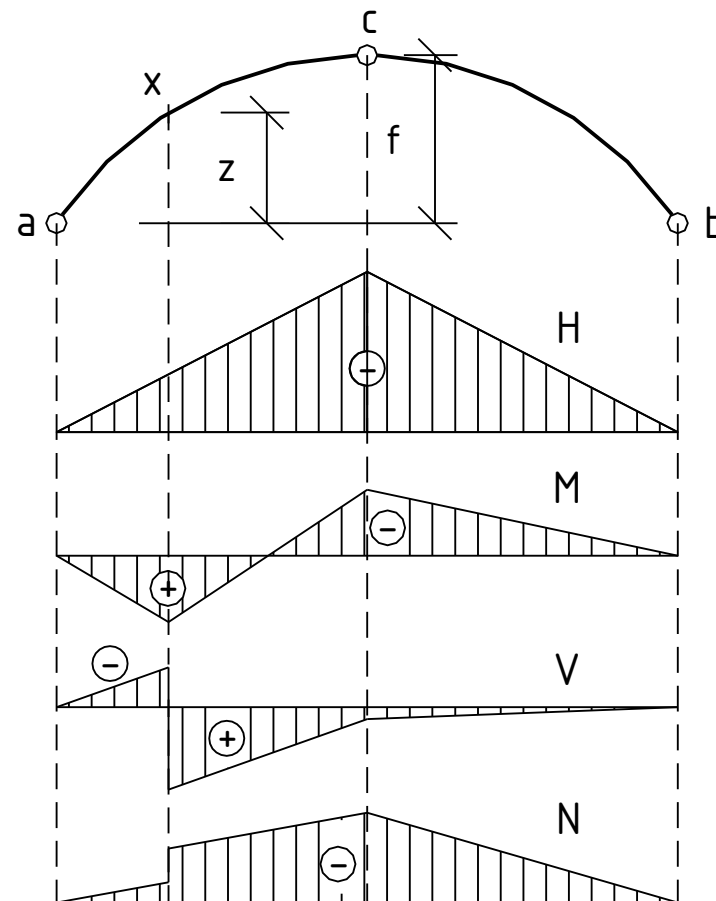


Globálna analýza – rovinné modely

Rovinný model: 3-kíbový oblúk

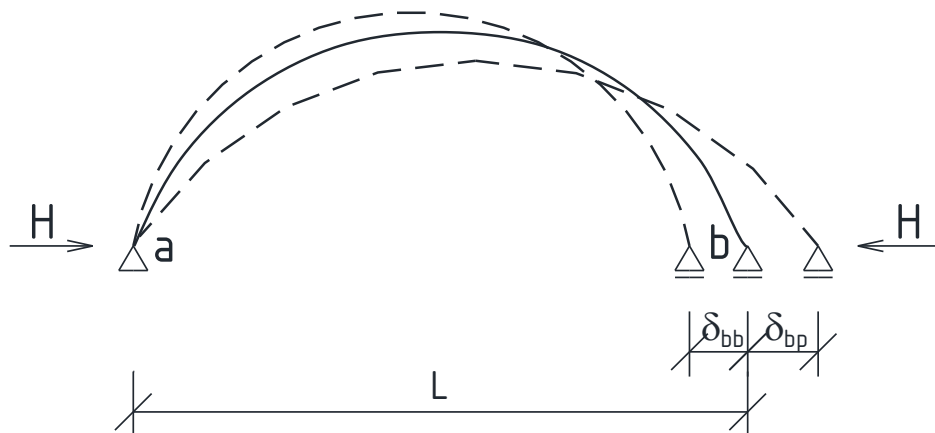
$$H = \frac{M_c}{f}$$

- Vplyvové čiary jednotlivých silových statických veličín



Globálna analýza – rovinné modely

Rovinný model: 2-kĺbový oblúk



δ_{bp} vodorovný posun podpory
základnej staticky určitej sústavy
od zaťaženia, zmeny teploty a
popustenia podpory

δ_{bb} vodorovný posun podpory
základnej staticky určitej sústavy
od staticky neurčitej sily $H=1$

$$\delta_{bp} = \int_1 \frac{M_0 M_p}{EI} ds + \int_1 \frac{V_0 V_p}{GA} ds + \int_1 \frac{N_0 N_p}{EA} ds + \alpha \Delta t l + \Delta p$$

$$\delta_{bb} = \int_1 \frac{M_0^2}{EI} ds + \int_1 \frac{V_0^2}{GA} ds + \int_1 \frac{N_0^2}{EA} ds$$

tuhý oblúk Globálna analýza – rovinné modely

$$H = \frac{\int_1 \frac{M_0 M_p}{EI} ds + \alpha \Delta t l + \Delta p}{\int_1 \frac{M_0^2}{EI} ds + \int_1 \frac{N_0^2}{EA} ds}; ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$$

voľný oblúk vystužený trámom

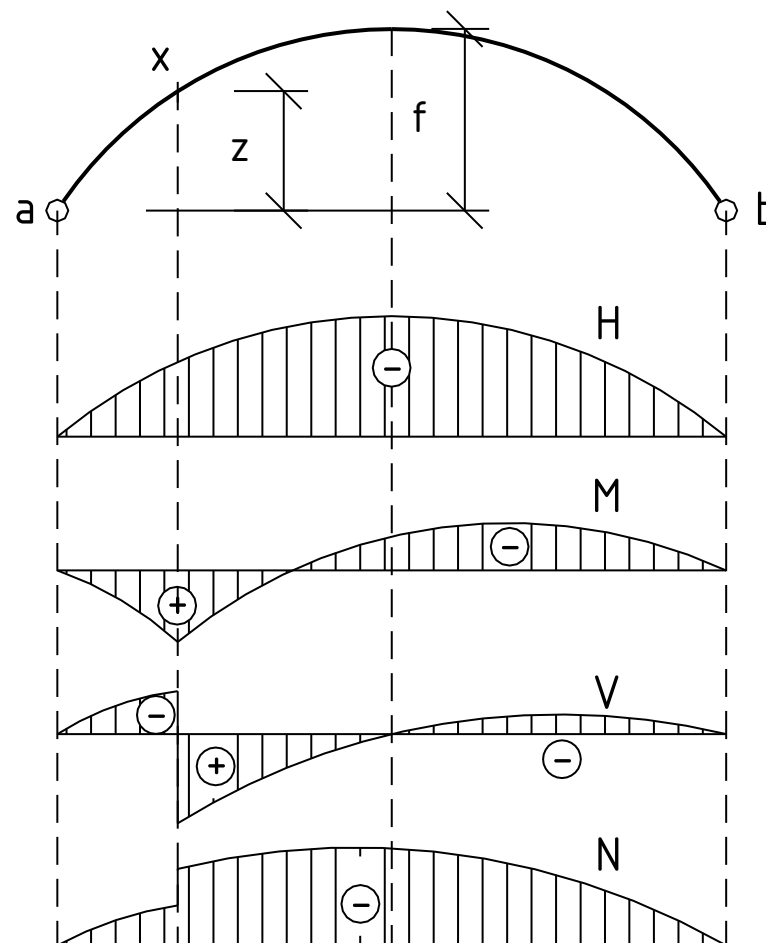
$$H = \frac{\int_1 \frac{M_0 M_p}{EI} ds + \alpha \Delta t l + \Delta p}{\int_1 \frac{M_0^2}{EI} ds + \sum \frac{S_0^2 s_i}{EA_i}}; ds = dx$$

Langerov trám

$$H = \frac{\int_1 \frac{M_0 M_p}{EI} ds}{\int_1 \frac{M_0^2}{EI} ds + \int_1 \frac{N_0^2}{EA} ds + \sum \frac{S_0^2 s_i}{EA_i}}; ds = dx$$

tuhý oblúk s ťahadlom

$$H = \frac{\int_1 \frac{M_0 M_p}{EI} ds}{\int_1 \frac{M_0^2}{EI} ds + \int_1 \frac{N_0^2}{EA} ds + \sum \frac{S_0^2 s_i}{EA_i}}; ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$$



Globálna analýza – rovinné modely

Rovinný model: votknutý oblúk

- 3 x staticky neurčité
- rôzne voľby staticky neurčitých síl
- najvýhodnejšie ZUS - tak aby staticky neurčité veličiny pôsobili v ťažisku oblúka na fiktívnych dokonale tuhých ramenách

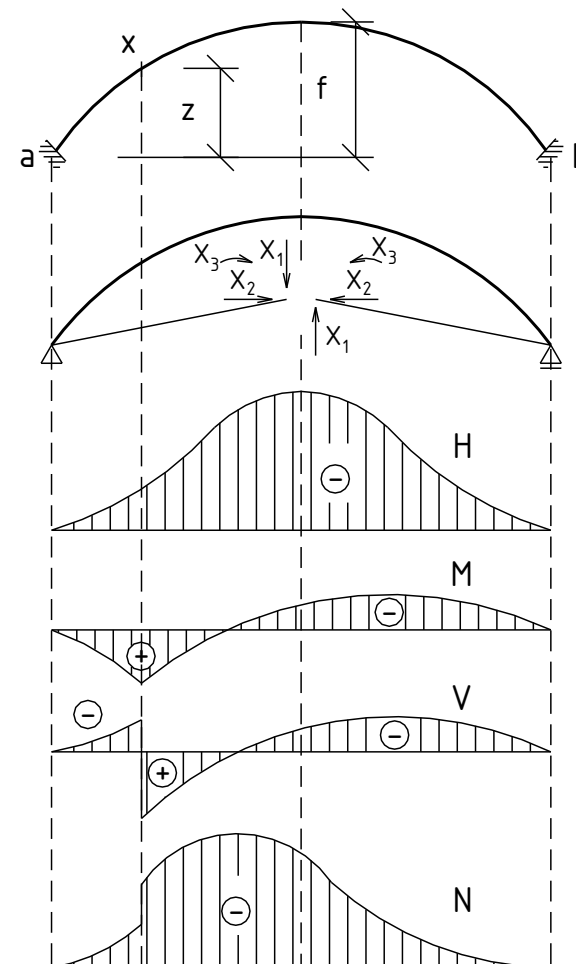
$$\delta_{ik} = \int_1 \frac{M_i M_k}{EI} ds + \int_1 \frac{V_i V_k}{GA} ds + \int_1 \frac{N_i N_k}{EA} ds$$

$$[\delta]\{X\} = [E] \longrightarrow \{X\} = [E][\delta]^{-1}$$

$[\delta]$ je matica deformácií základnej staticky určitej sústavy od jednotkových zaťažovacích stavov

$[E]$ je matica deformácií základnej staticky určitej sústavy od zvislého návrhového zaťaženia

$\{X\}$ sú neznáme hodnoty vnútorných síl



Globálna analýza – rovinné modely

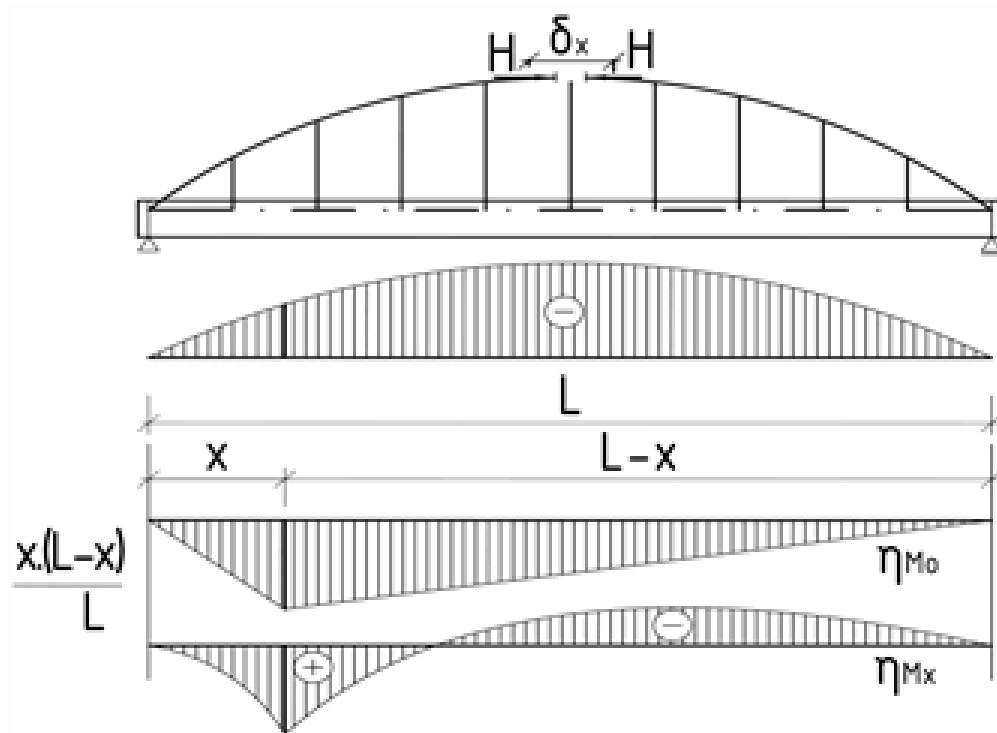
Nepravé oblúky s dolnou ťahanou mostovkou (napr. Langerove trámy)

$$H\delta_{ii} = -1$$

$$\delta_{ii} = \int_0^L \frac{M_1(x)}{EI_T(x)} dx + \int_0^L \frac{N_1(x)}{EA_T(x)} dx +$$

$$+ \sum \frac{S_{1,i} s_i}{EA_{O,i}} + \sum \frac{V_{1,i} s_i}{EA_{V,i}}$$

$$\{\eta_H\} = \frac{(\Delta L)^2}{6EI_s n} [P][I]\{M\}$$



$$\{M\} = \{M_{1,1}, M_{2,1}, M_{1,2}, M_{2,2}, \dots, M_{1,n+1}, M_{2,n+1}\}^T$$

Globálna analýza – rovinné modely

- Napätie vyjadrené k jadrovým bodom trámu

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_{y,2}} = \frac{Nr_1}{W_{y,2}} + \frac{M_y}{W_{y,2}} = \frac{1}{W_{y,2}}(M_y + Nr_1) = \dots = \frac{1}{W_{y,2}}[M_0 - H(z - r_1)]$$

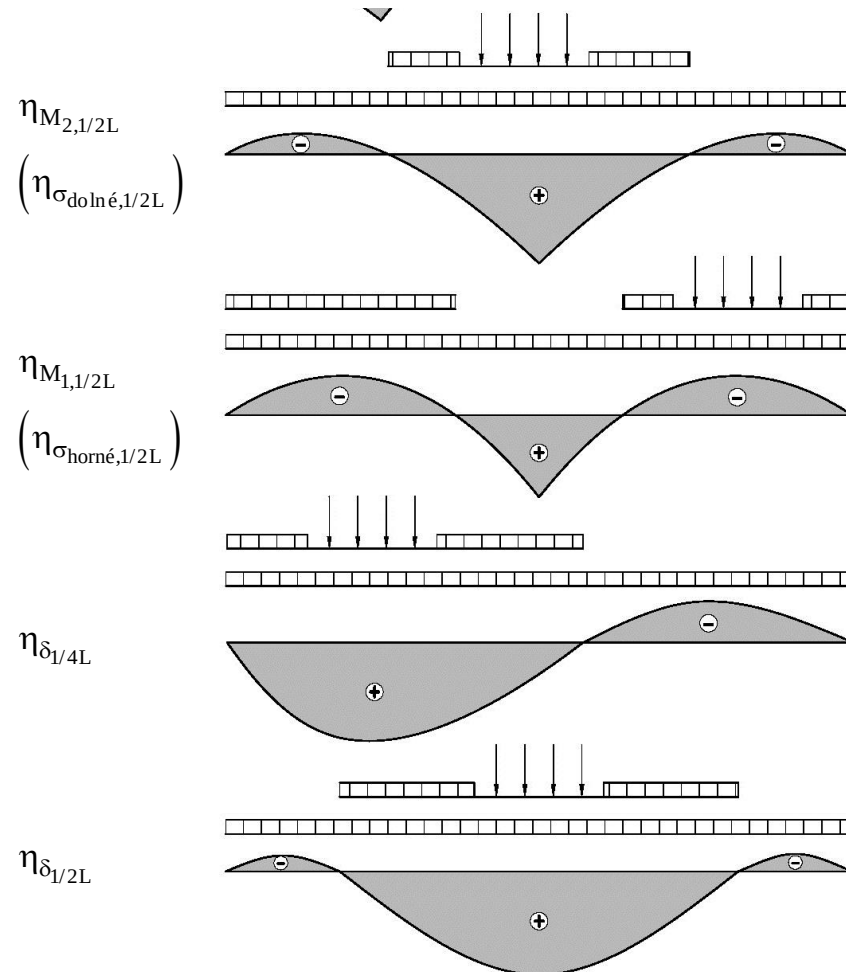
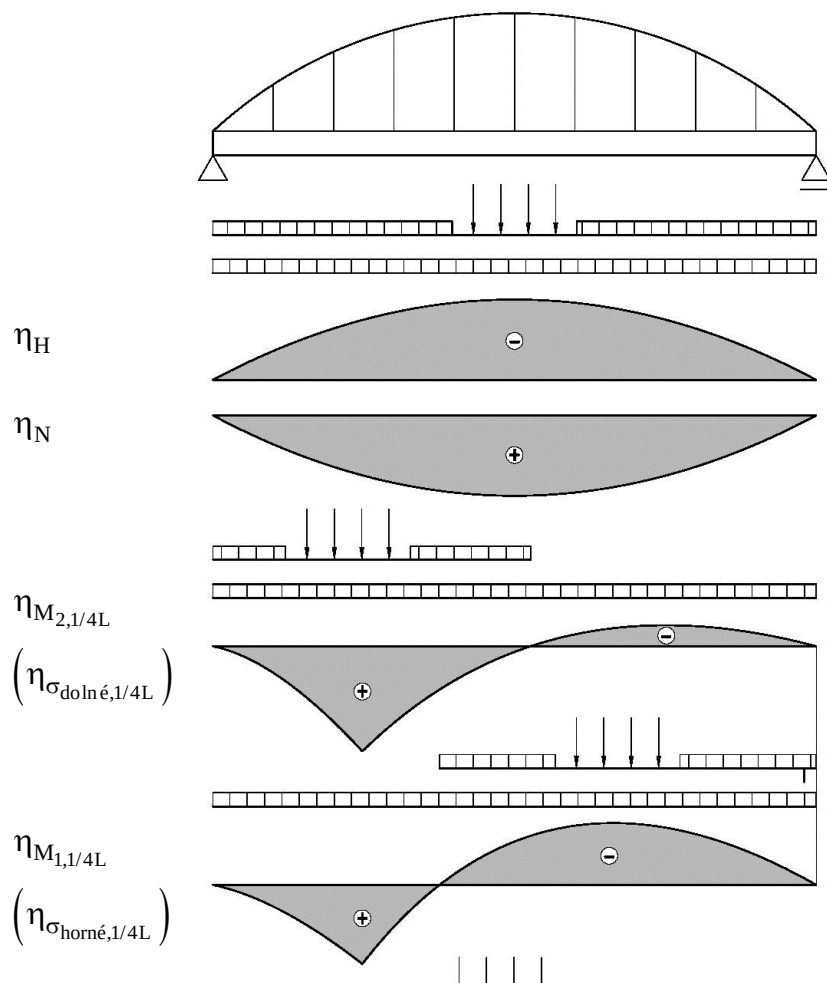
$$\sigma_1 = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_{y,1}} = \frac{Nr_2}{W_{y,1}} - \frac{M_y}{W_{y,1}} = -\frac{1}{W_{y,1}}(M_y - Nr_2) = \dots = \frac{1}{W_{y,1}}[M_0 - H(z + r_2)]$$

- Môžeme aplikovať aj na vplyvové čiary momentov ku krajným vláknam (vplyvové čiary napätí v krajných vláknoch)

$$\eta_{M2} = \eta_{M,0} - \eta_H(z - r_1)$$

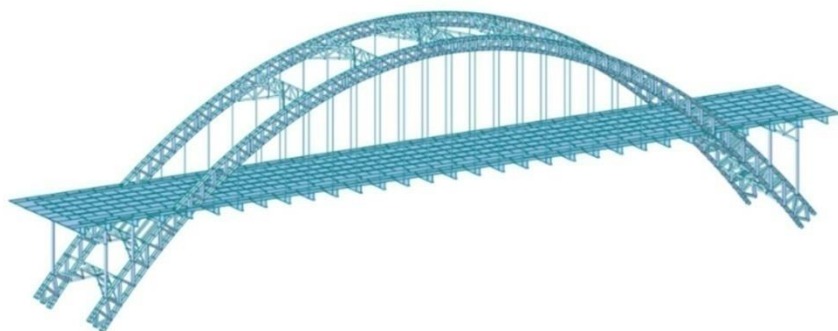
$$\eta_{M1} = \eta_{M,0} - \eta_H(z + r_2)$$

Globálna analýza – rovinné modely

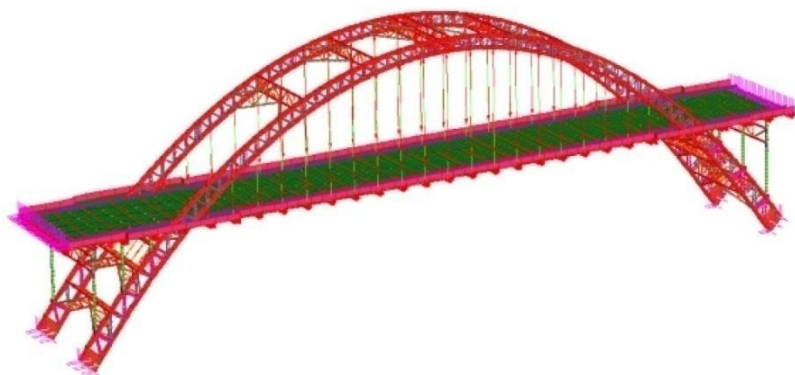


Globálna analýza – 3D MKP

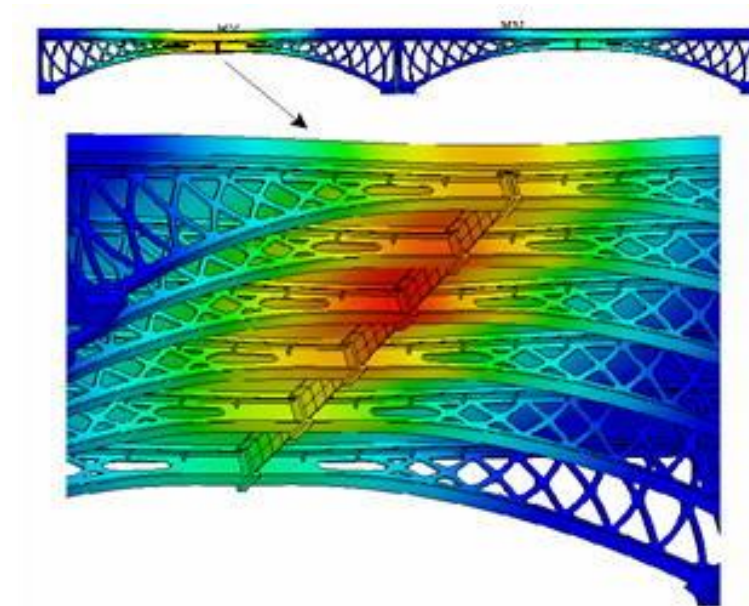
3D modely dnes uprednostňované



(b)

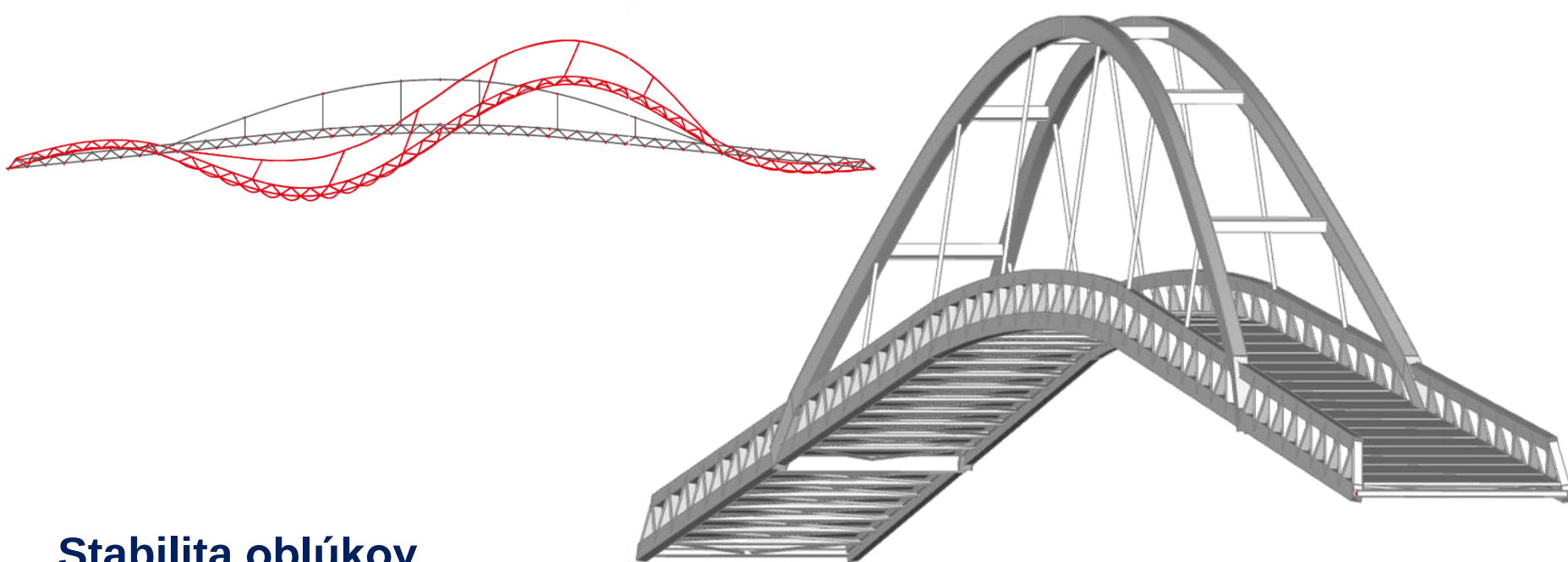


(c)



Projekt je podporovaný z programu Interreg V-A Slovenská republika – Česká republika a spolufinancovaný z Európskeho fondu regionálneho rozvoja

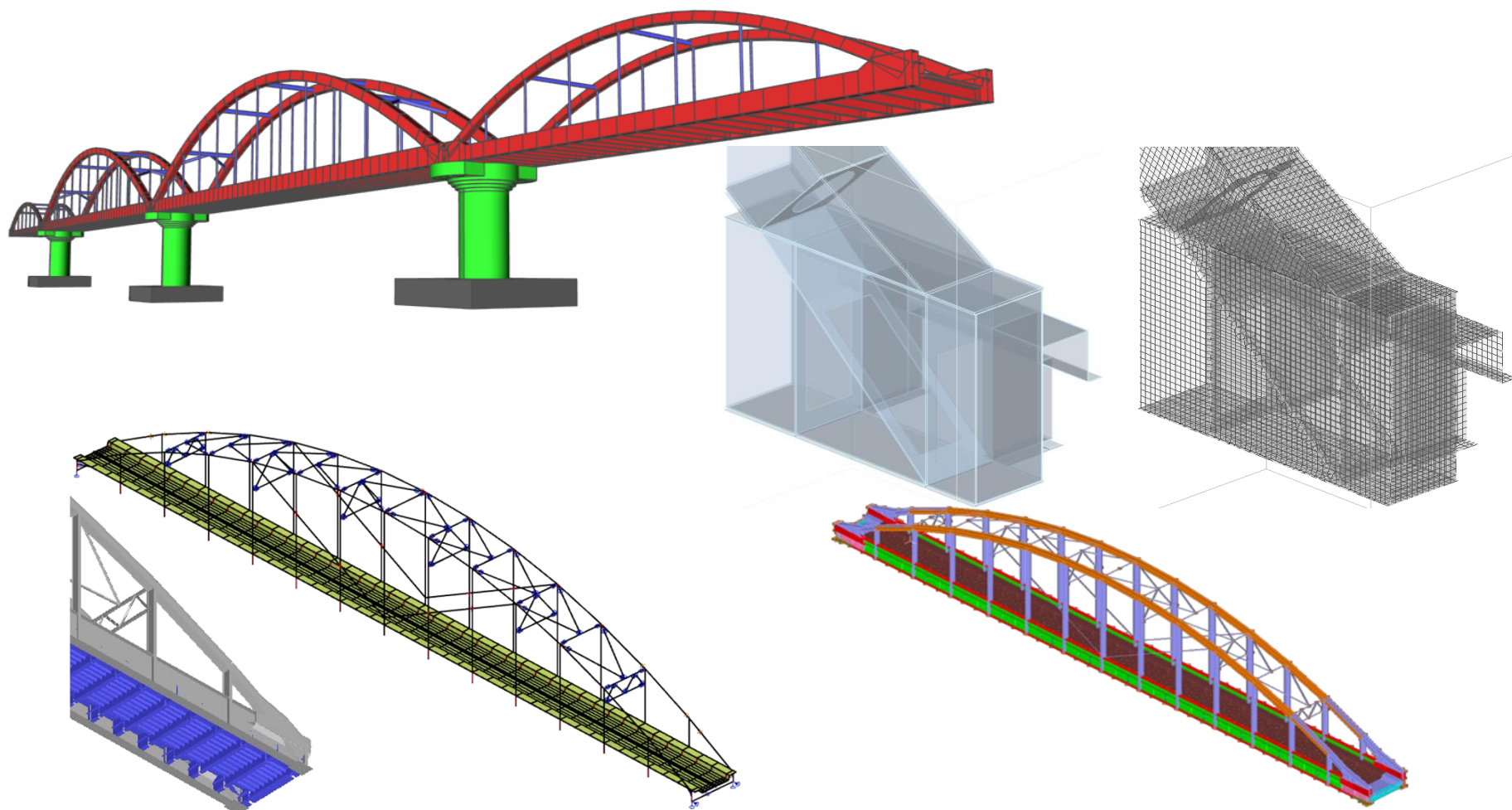
Globálna analýza – 3D MKP



Stabilita oblúkov

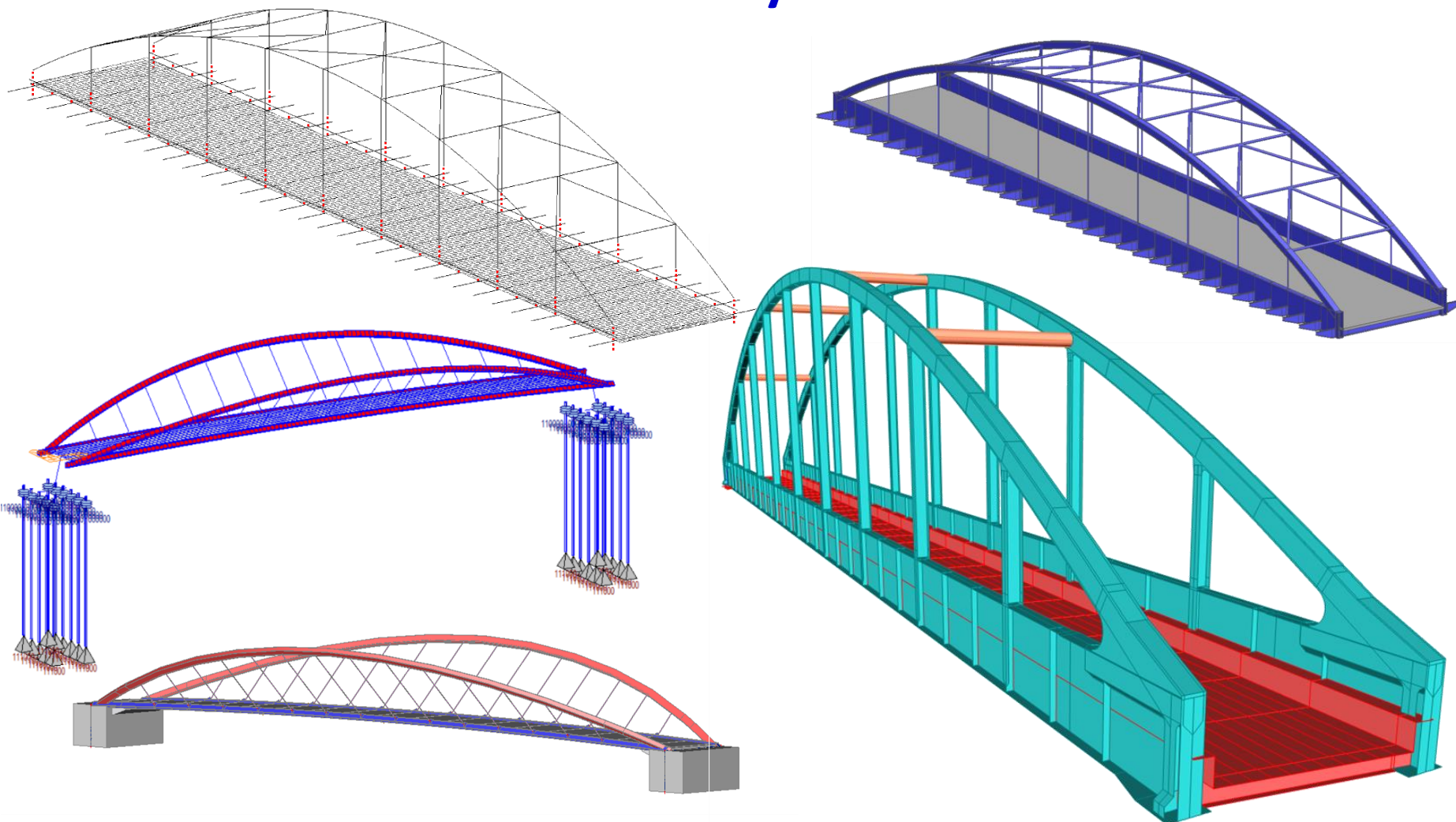
- oblúky sa líšia od priamych prútov pri namáhaní na tlak tým, že ich body podopretia sú uložené neposuvne
- vodorovná sila ani zvislé zložky reakcií nevykonávajú žiadnu pretvárnú prácu pri vybočení oblúka - prírastok pretvárnej práce vzniká iba od vonkajšieho zaťaženia oblúka

Globálna analýza – 3D MKP



Projekt je podporovaný z programu Interreg V-A Slovenská republika – Česká republika a spolufinancovaný z Európskeho fondu regionálneho rozvoja

Globálna analýza – 3D MKP



Projekt je podporovaný z programu Interreg V-A Slovenská republika – Česká republika a spolufinancovaný z Európskeho fondu regionálneho rozvoja

Stabilita oblúkov a imperfekcie

Stabilita oblúkov

a) **Zaťaženie celého oblúka** - strata stability tvaru v rovine aj z roviny

- stabilitný problém
- tvar vybočenia vo väčšine nesymetrický
- výnimky pri oblúkových mostoch s veľmi malým vzopätím alebo pri trojkĺbových oblúkoch - môže byť aj symetrický tvar vybočenia
- zvláštnym prípad - stabilná poloha „previsnutého vlákna“ (tzv. prelomenie oblúka) v prípade plochých oblúkov

b) **Zaťaženie polovice oblúka** - strata stability tvaru v rovine

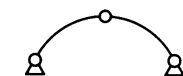
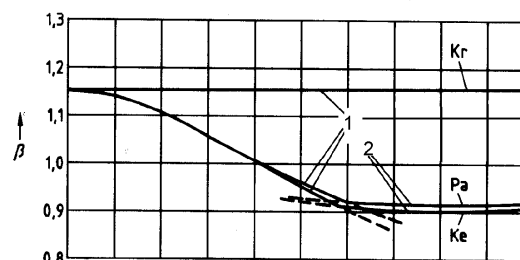
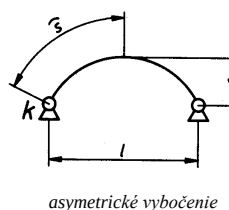
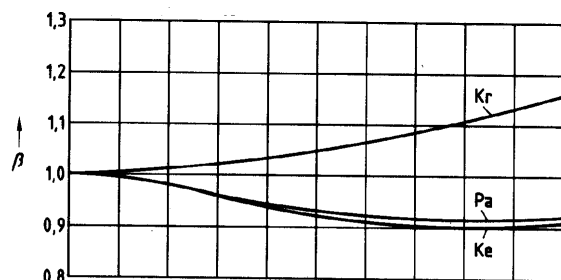
- pevnostný problém
- ohybová čiara strednice oblúka od vonkajšieho zaťaženia z väčšej časti súhlasí s tvarom vybočenia oblúka daným pre najmenšiu vlastnú hodnotu diferenciálnej rovnice pretvorenia
- teória II. rádu – prírastková metóda – zaťaženie postupne zvyšujeme až po kritickú hodnotu, kedy sa vyčerpá únosnosť prierezu

Stabilita oblúkov a imperfekcie

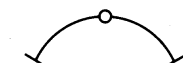
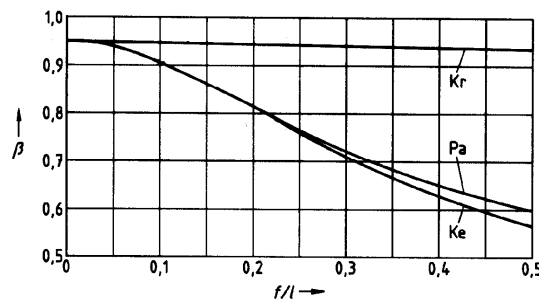
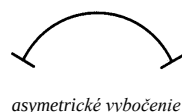
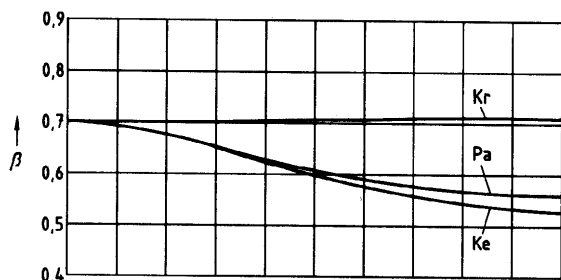
Stabilitný problém – vzper v rovine oblúka

$$N_{cr,y} = \left(\frac{\pi}{\beta s} \right)^2 EI_y$$

$N_{cr,y}$ je kritická sila v oblúku pri vybočení v rovine oblúka
 s je polovičná dĺžka strednice oblúka
 EI_y je ohybová tuhosť v rovine oblúka
 β je súčiniteľ vzpernej dĺžky



1 symetrické vybočenie
 2 asymetrické vybočenie

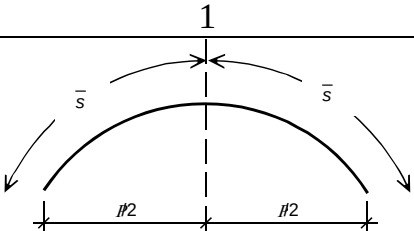
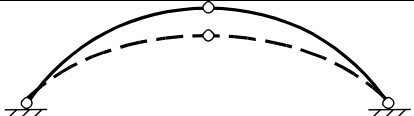
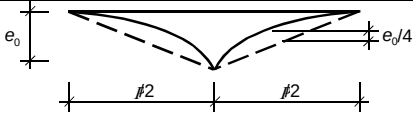
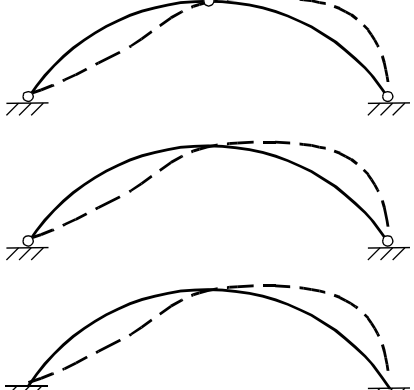
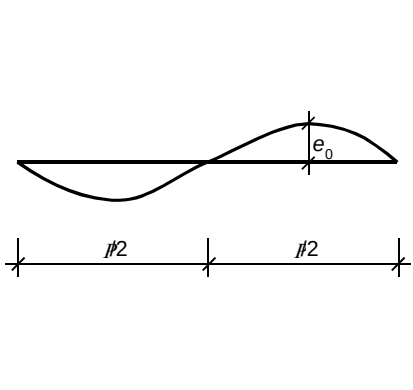


symetrické vybočenie

P_a : parabolický tvar
 K_e : tvar reťazovky
 K_r : kruhový tvar

Stabilita oblúkov a imperfekcie

Vzper v rovine oblúka - imperfekcie

	1	2	3			
			e_0 podľa priradenia prierezu ku vzpernej krivke			
		Tvar imperfekcie (sínusoida alebo parabola)	a	b	c	d
1			$\frac{s}{300}$	$\frac{s}{250}$	$\frac{s}{200}$	$\frac{s}{150}$
2			$\frac{l}{600}$	$\frac{l}{500}$	$\frac{l}{400}$	$\frac{l}{300}$

– Tvary a amplitúdy imperfekcií pre vybočenie oblúkov v ich rovine - EN

Stabilita oblúkov a imperfekcie

Stabilitný problém – vzper z roviny oblúkov

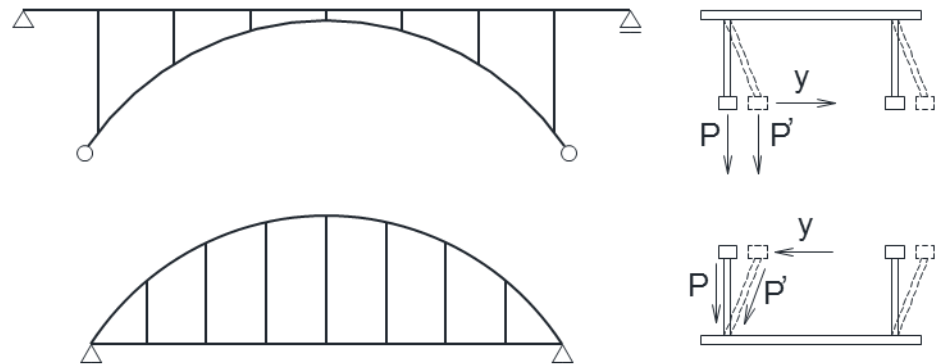
$$N_{cr,z} = \left(\frac{\pi}{\beta l} \right)^2 EI_z$$

$N_{cr,z}$ je kritická sila v oblúku pri vybočení z roviny oblúka
 l je dĺžka oblúka
 EI_z je ohybová tuhosť z roviny oblúka
 β je súčiniteľ vzpernej dĺžky

A) Voľné oblúky

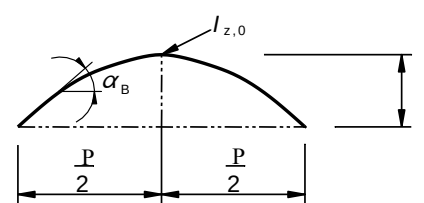
- hodnota N_{cr} závisí najmä od geometrie oblúkového mosta a polohy mostovky
- stĺpy (steny) pôsobia destabilizujúco na oblúk
- ťahané závesy pôsobia priaznivo

$$\beta = \beta_1 \beta_2$$

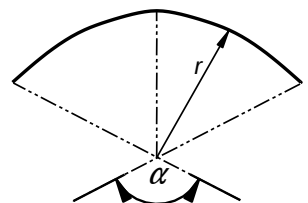


Stabilita oblúkov a imperfekcie

Hodnoty β_1

f/ℓ	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	
I_z konštantný	0,50	0,54	0,65	0,82	1,07	
I_z sa mení $I_z(\alpha_B) = \frac{I_{z,0}}{\cos \alpha_B}$	0,50	0,52	0,59	0,71	0,86	

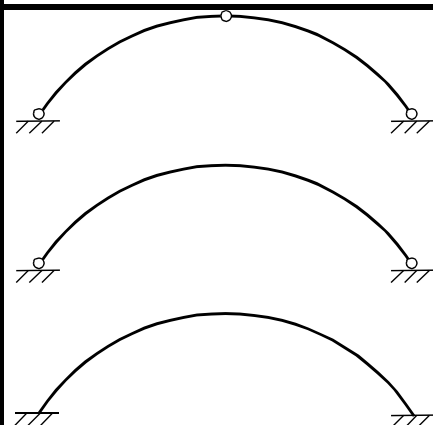
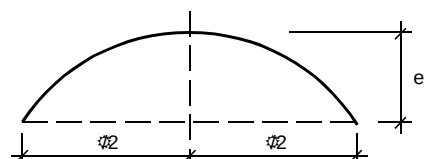
Hodnoty β_2

Zaťaženie	β_2	Poznámky
Konzervatívne (mostovka je pripevnená k vrcholu oblúka)	1	 q celkové zaťaženie q_H časť zaťaženia prenášaná závesmi q_{St} časť zaťaženia prenášaná stojkami
Závesy	$1 - 0,35 \frac{q_H}{q}$	
Stojky	$1 - 0,45 \frac{q_{St}}{q}$	

B) Vystužené oblúky ... viac pri problematike trávov vystužených oblúkom

Stabilita oblúkov a imperfekcie

Vzper z roviny oblúka - imperfekcie

	Tvar imperfekcie (sínusoida alebo parabola)	e_0 podľa priradenia prierezu ku vzpernej krivke				
			a	b	c	d
		$\ell \leq 20 \text{ m}$	$\frac{\ell}{300}$	$\frac{\ell}{250}$	$\frac{\ell}{200}$	$\frac{\ell}{150}$
		$\ell > 20 \text{ m}$ $\ell_1 = \sqrt{20 \ell} [\text{m}]$	$\frac{\ell_1}{300}$	$\frac{\ell_1}{250}$	$\frac{\ell_1}{200}$	$\frac{\ell_1}{150}$

- Tvary a amplitúdy imperfekcií pre vybočenie oblúkov z ich roviny - EN

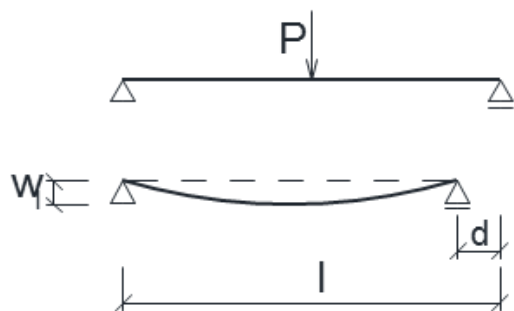
Stabilita oblúkov a imperfekcie

Pevnostný problém

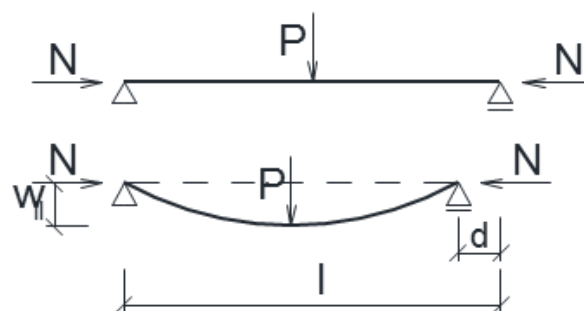
- Teória veľkých deformácií

$$-\frac{M}{EI} = \frac{w'''}{(1+w'^2)^{3/2}} \quad -\frac{M}{EI} = w''$$

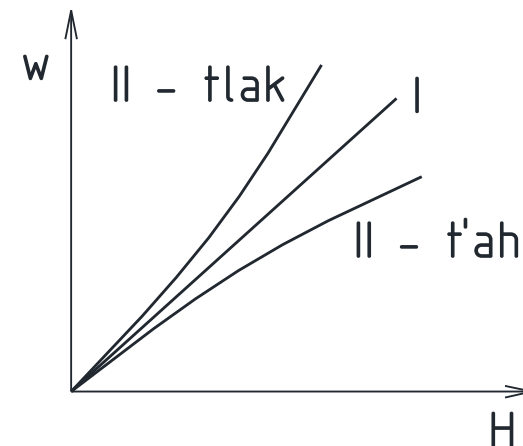
- V teórii II. rádu neplatia dva základné princípy statiky: princíp superpozície a princíp úmernosti



$$M_I = \frac{1}{4} Pl$$



$$M_{II} = \frac{1}{4} Pl + N w_I$$



$$w_{II} = w_I \frac{N_{cr}}{N_{cr} - N}$$

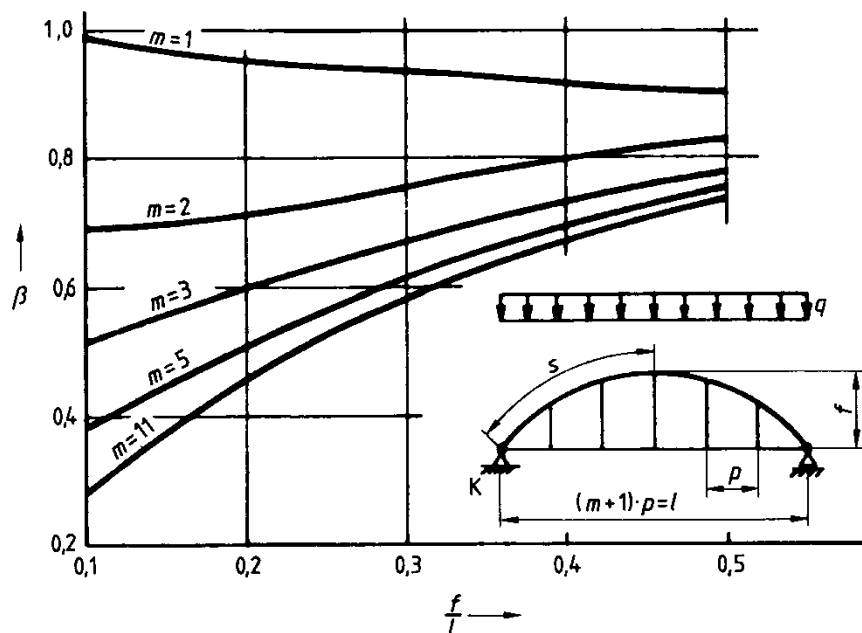
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Stabilita oblúkov a imperfekcie

„Langerove trámy“ - vzper v rovine oblúka – veľmi približne

$$N_{cr,y} = \left(\frac{\pi}{\beta s} \right)^2 EI_y$$

$N_{cr,y}$ je kritická sila v oblúku pri vybočení v rovine oblúka
 s je polovičná dĺžka strednice oblúka
 EI_y je ohybová tuhosť v rovine oblúka
 β je súčiniteľ vzpernej dĺžky

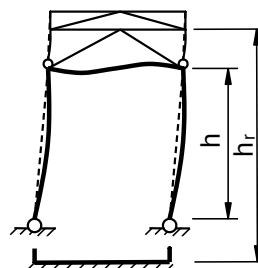
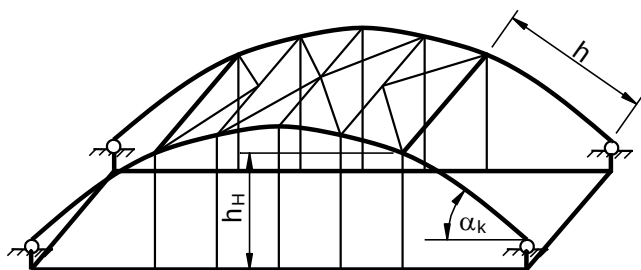


Pri tuhom tráme však

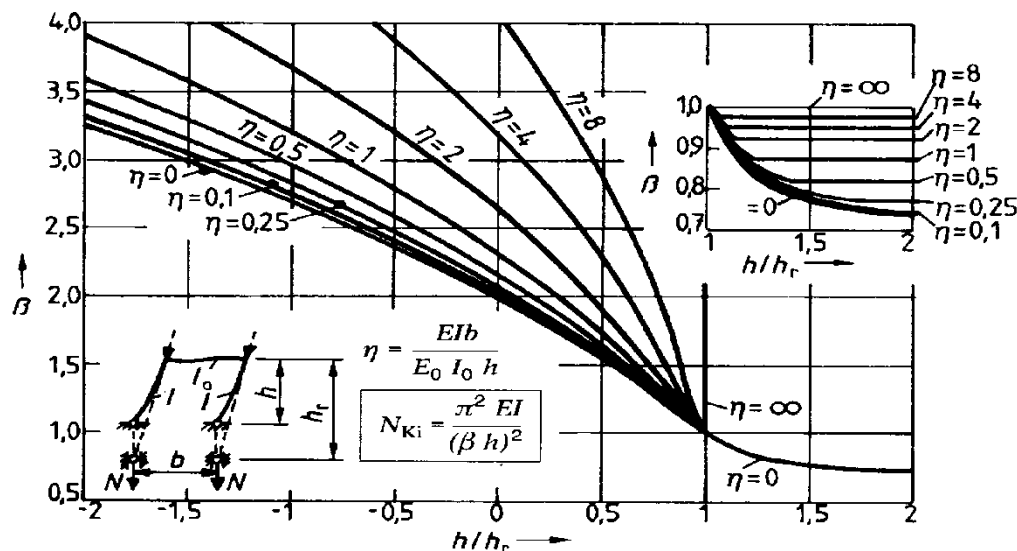
- precenené vzperné dĺžky oblúka,
- zväčša $L_{cr,y} = s_i$

Stabilita oblúkov a imperfekcie

„Langerove trámy“ - vzper z roviny oblúka - približne



$$h_H \frac{1}{\sin \alpha_k}$$



Stabilita oblúkov a imperfekcie

Nepravé oblúky s dolnou ťahanou mostovkou

- imperfekcie pre globálnu analýzu prúťových konštrukcií majú byť volené tak, aby sa uvážila strata stability vybočením v rovine aj z roviny, skrútením, so symetrickým a nesymetrickým tvarom, v najnepriaznivejšom smere a forme
- pri Langerových trámoch sa táto požiadavka často redukuje na overenie stability oblúkov z ich roviny.
- na rozdiel od pravých oblúkov, je vzperná dĺžka v rovine oblúka Langerovho trámu kontrolovaná ťahanými závesmi
- stabilita v rovine – najmä v prípadoch, ak vzrastá pomer tuhosti medzi oblúkom a vodorovným nosníkom, prípadne sú navrhnuté závesy s veľmi malou tuhosťou (lanové prvky)
- použitie prúťových modelov oblúka otvára cestu použitiu výpočtu podľa teórie 2. rádu so zadanými imperfekciami aj v bežne dostupných komerčných softvéroch
- kompletne zohľadnenie lokálnych aj globálnych imperfekcií v globálnej analýze kladie veľké nároky na komplexnosť výpočtového modelu a zložité zadávanie imperfekcií.
- viac sa využíva metóda, kedy sa účinky 2. rádu zohľadnia čiastočne pomocou globálnej analýzy a čiastočne prostredníctvom posudzovania prvkov.

Stabilita oblúkov a imperfekcie

LA + LBA

- Ak sa aplikuje analýza teóriou 1. rádu a $\alpha_{cr} > 3,0$:

$$M_{II} = k_{II} \cdot M_I \qquad k_{II} = \frac{1}{1 - 1/\alpha_{cr}} = \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1}$$

- Stále najpoužívanější spôsob: zohľadnenie účinkov 2. rádu a imperfekcií až pri overovaní odolnosti náhradných prútov zavedením vzperných dĺžok zodpovedajúcich globálnemu vlastnému tvaru straty stability konštrukcie.

$$L_{cr,z} = \pi \sqrt{\frac{EI_z}{\alpha_{cr} N}} = \beta_z L$$

- koncepcia náhradného prúta dáva však dobré výsledky pri priamych prútoch
- navyše produkuje chyby pri namáhaní M+N
- pri oblúku Langerovho trámu môže dochádzať k výraznejším chybám
- problematické riešenie priebehov momentov na náhradnom prúte a pod

Stabilita oblúkov a imperfekcie

GNIA analýza

- zakomponovať imperfekcie do globálnych modelov
- lokálne imperfekcie sú definované začiatkové zakrivenia prútov v tvare sínusoidy alebo kvadratickej paraboly s amplitúdou e_0
- začiatkové globálne imperfekcie dané naklonením rámových systémov (pri analýze Langerových trémov s nadmostovkovým stužením a portálmi)
- predpokladaný tvar globálnych a lokálnych imperfekcií podľa EN smie však odvodiť aj od vlastného pružného tvaru vybočenia konštrukcie pri jej strate stability v uvažovanej rovine
- výhodou tohto postupu je, že vlastný tvar straty stability konštrukcie sa dá ľahko vypočítať a reprezentuje najúčinnější začiatkový tvar zakrivenia.
- postup sa dá navyše výhodne začleniť do výpočtových programov
- táto jednotná globálna a lokálna imperfekcia η_{cr} sa vypočíta pomocou LBA
- použitie vlastných tvarov straty stability konštrukcie ako ekvivalentných imperfekcií naráža na problém stanovenia amplitúd tvarov vybočenia – **pozri aj priehradové mosty – stabilita tlačeneho pásu**

Stabilita oblúkov a imperfekcie

- pozri aj priehradové mosty – stabilita tlačeneho pásu

$$\eta_{\text{init}} = e_{0,d} \frac{N_{\text{cr},m}}{|EI_m \eta_{\text{cr}}''|_m} \eta_{\text{cr}}(x) = \frac{e_{0,d}}{\lambda_m^2} \frac{N_{\text{Rk},m}}{|EI_m \eta_{\text{cr}}''|_m} \eta_{\text{cr}}(x)$$

$$\eta_{\text{init,max}} = \frac{e_{0,d}}{\lambda_m^2} \frac{N_{\text{Rk},m} |\eta_{\text{cr}}|_{\text{max}}}{|EI_m \eta_{\text{cr}}''|_m} = \frac{e_{0,d}}{\lambda_m^2} \frac{N_{\text{Rk},m} |\eta^{\parallel}|_{\text{max}}}{|M_{\eta_{\text{cr}}}^{\parallel}|_m}$$

- pre prúty s konštantným prierezom sa konštantnou osovou silou je rozhodujúci ten prierez, v ktorom dosahuje svoje maximum
- pre prúty s premenným prierezom a/alebo premennou osovou silou po ich dĺžke sa predpokladá, že rozhodujúci prierez „m“ je ten, kde súčet napätí od osovej sily a ohybového momentu dosahuje svoje maximum.
- polohu kritického prierezu je teda potrebné určiť iteratívnym postupom. Pri výpočte násobiteľov $\alpha_{\text{ult},k,m}$ a α_{cr} sa smie uvážiť, že prúty konštrukcie sú zaťažené iba osovými silami N_{Ed} , z LA
- stále pomerne veľa numerických výpočtov
- ak má byť použitie tejto metódy na mieste využiť výpočtové programy obsahujúce modul stabilita (LBA)

Stabilita oblúkov a imperfekcie

- neznámou však naďalej ostáva amplitúda
- ak si však zvolíme pretvorenie niektorého z uzlov za porovnávacie (teda vodorovný posun oblúka pri strate jeho stability z roviny), potom

$$\eta_{\text{init,max}} = \frac{e_{0,d}}{\lambda_m^2} \frac{N_{Rk,m} |\eta_{cr}|_{\text{max}}}{|EI_m \eta''_{cr}|_m} = \frac{e_{0,d}}{\lambda_m^2} \frac{N_{Rk,m} |\eta^{\parallel}|_{\text{max}}}{|M^{\parallel}_{\eta_{cr}}|_m}$$

$|\eta^{\parallel}|_{\text{max}}$ je maximum absolútnych hodnôt priehybov $\eta^{\parallel}$ konštrukcie so začiatočným pretvorením v tvare η_{cr} s ľubovoľne zvolenou amplitúdou $|\eta_{cr}|_{\text{max}}$ vypočítaných na základe teórie 2. rádu,

$|M^{\parallel}_{\eta_{cr}}|_m$ opisuje absolútnu hodnotu ohybového momentu podľa teórie 2. rádu v priereze m takto začiatočne zakrivenej konštrukcie.

- zjednodušenia pre dominantné vybočenie z jednej roviny (vplyv II. Rádu v druhej rovine sa zanedbáva/ zjednodušuje